



**Facultad de Ciencias**

**Rigidez y multitriangulaciones  
(Rigidity and multitriangulations)**

**Trabajo de Fin de Máster  
para acceder al**

**Máster en Matemáticas y Computación**

Autor: Luis Crespo Ruiz

Director: Francisco Santos Leal

Julio 2021

## Resumen

En este trabajo se estudian, en primer lugar, las matroides de rigidez, empezando con ideas generales y luego concretando en la rigidez clásica y la de cofactores. Demostramos la equivalencia entre estas matroides en un caso concreto y la maximalidad de la matroide de rigidez de cofactores en dimensión tres, y calculamos los coeficientes de la autotensión de  $K_{d+2}$ . Luego estudiamos las multitriangulaciones, con el objetivo de deducir resultados sobre su rigidez y la posible existencia del multiasociaedro. Presentamos algunos resultados generales, y otros para  $k = 2$  y  $n$  pequeño.

**Palabras clave:** rigidez, matroides, cofactores, multitriangulaciones, multiasociaedro

## Abstract

In this project are studied, in first place, rigidity matroids, starting with general ideas and then concreting in classical and cofactor rigidity. We prove the equivalence between these two matroids in a concrete case and the maximality of cofactor rigidity matroid in dimension three, and compute the coefficients of the self-stress in  $K_{d+2}$ . Then we study multitriangulations, aiming to prove results about their rigidity and the possible existence of the multiassociahedron. We present some general results, and other results for  $k = 2$  and small  $n$ .

**Keywords:** rigidity, matroids, cofactors, multitriangulations, multiassociahedron

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1 Rigidez</b>	<b>4</b>
1.1 Matroides de rigidez . . . . .	4
1.2 Rigidez clásica . . . . .	7
1.2.1 Introducción y resultados generales . . . . .	7
1.2.2 Interpretación homológica de la rigidez . . . . .	13
1.3 Rigidez de cofactores . . . . .	16
1.3.1 Definición y primeras propiedades . . . . .	16
1.3.2 Relación con la rigidez clásica . . . . .	19
1.3.3 $C_2^1$ es la matroide maximal de rigidez en dimensión 3 . . . . .	21
1.3.4 El circuito formado por un $K_{d+2}$ . . . . .	24
<b>2 Multitriangulaciones</b>	<b>28</b>
2.1 Geometría y combinatoria de las multitriangulaciones . . . . .	28
2.1.1 Introducción . . . . .	28
2.1.2 Estrellas . . . . .	28
2.1.3 Flips . . . . .	32
2.1.4 Inserción y eliminación de vértices . . . . .	36
2.2 Rigidez . . . . .	37
2.2.1 Resultados generales . . . . .	37
2.2.2 El multiasociaedro . . . . .	41
2.2.3 2-triangulaciones con pocos vértices . . . . .	45
<b>Bibliografía</b>	<b>51</b>

# Introducción

Una matroide es una estructura que permite abstraer la idea de dependencia e independencia lineal (o de otro tipo) en un conjunto finito de elementos. Un caso particular de matroides son las *matroides de rigidez*, cuya idea de dependencia está relacionada con los movimientos que admiten los diferentes grafos que podemos construir con un conjunto dado de puntos, donde un grafo se modeliza como un subconjunto de  $\binom{[n]}{2} := \{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n\}$ . Esto permite definir un concepto combinatorio de rigidez. El rango de las matroides en cuestión solo depende del número  $n$  de vértices del grafo y de la dimensión  $m$  en la que está inmerso: para  $n \leq m$ , el rango es  $\binom{n}{2}$  (la matroide es totalmente libre), y para  $n > m$  es  $nm - \binom{m+1}{2}$ .

En la primera parte de la memoria (capítulo 1) resumimos diversos aspectos de esta aproximación combinatoria a la rigidez. Partiendo de la definición abstracta de *matroide de rigidez* (sección 1.1) comenzamos estudiando el ejemplo más natural, la matroide de rigidez *clásica* (sección 1.2), que se define como la asociada a las filas de una cierta matriz definida por las posiciones de los puntos, y que tiene que ver con la *rigidez infinitesimal de barras y puntos*. Esta matroide depende de la posición de los vértices, pero en casi todas las posiciones es la misma: se trata de la *rigidez genérica*.

Existe una operación llamada *k-extensión* que obtiene, a partir de un grafo, otro con un vértice más. La 0-extensión conserva la independencia y la rigidez en cualquier matroide de rigidez (Teorema 1.1.10). En general, siempre es cierto que una *k-extensión* se puede deshacer (Teorema 1.1.11), lo que da pie a definir las *secuencias de Henneberg*. Que exista una secuencia de Henneberg para un grafo dado es una condición necesaria, pero no suficiente, para que un grafo sea independiente en cualquier matroide de rigidez. Lo mismo pasa con la *condición de Laman*, que dice que cualquier subconjunto de vértices induce, como mucho, un número de aristas igual al rango del grafo completo en esos vértices.

En la matroide de rigidez clásica, además de la ya mencionada 0-extensión, la 1-extensión (Teorema 1.2.8) y otra operación llamada *división de vértice* (Teorema 1.2.13) también conservan la independencia. Gracias a estas operaciones se demuestra que, en una y dos dimensiones, las condiciones de Laman y Henneberg son no solo necesarias sino también suficientes (Teoremas 1.2.9 y 1.2.11), y la matroide de rigidez clásica genérica es la única matroide de rigidez maximal en dos dimensiones.

Otra forma de definir la rigidez es a través de una cadena homológica (subsección 1.2.2). Para ello, se pueden definir las 1-cadenas como fuerzas de extensión o contracción ejercidas en las aristas, las 0-cadenas como el espacio de fuerzas sobre cada vértice y las  $(-1)$ -cadenas como el espacio de fuerzas y momentos globales del sistema. Esto se puede formalizar, por ejemplo, en el *álgebra exterior*. En la cohomología correspondiente, las  $(-1)$ -cocadenas son los movimientos triviales del grafo, las 0-cocadenas los movimientos de cada vértice y las 1-cocadenas la deformación producida en las aristas. Para esta homología, el número de Betti de orden 0 nos dice “cuántas aristas faltan para ser rígido” y el de orden 1 dice cuántas “sobran para ser libre” (Proposición 1.2.15).

Otra matroide de rigidez es la llamada “rigidez de cofactores” (sección 1.3). Una manera de formalizarla es definiendo las cadenas de homología en el *álgebra simétrica* en vez de la exterior, manteniendo la dimensión del espacio en 2 y variando en su lugar el grado de los polinomios, al que llamo  $s$ . Esta matroide también es la matroide lineal de una matriz,

pero es distinta matriz, y se puede demostrar que también cumple los requisitos para ser matroide de rigidez en dimensión  $s+1$  (Teorema 1.3.3). Se le puede dar una interpretación en términos de splines: un grafo es dependiente si admite splines de grado  $s$  derivables  $s-1$  veces en las aristas (Teorema 1.3.4).

En esta nueva forma de rigidez, no solo la 0 y 1-extensión y la división de vértice conservan la independencia (y la rigidez), sino también algunas formas de 2-extensión (Teorema 1.3.5). Para una y dos dimensiones, esta matroide es la misma que la clásica, para tres dimensiones, se cree que son la misma, y para más dimensiones se sabe que son distintas: por ejemplo  $K_{d+2,d+2}$  es dependiente en dimensión  $d$  para la rigidez clásica y libre para la de cofactores (si  $d \geq 4$ , Ejemplo 1.3.8). Como primer resultado original de esta memoria, demostramos que, sin embargo, *la rigidez de cofactores con puntos en una parábola coincide exactamente con la rigidez clásica con puntos en la curva de momentos* (Teorema 1.3.11). Este resultado ha suscitado interés entre varios expertos en rigidez combinatoria, así que lo hemos escrito de manera independiente como artículo [3].

En 3 dimensiones ( $s=2$ ) se ha demostrado recientemente [4] que la matroide de rigidez de cofactores es la única matroide de rigidez maximal (Teorema 1.3.12). Esto se debe a que cualquier grafo independiente en una matroide de 3-rigidez se puede obtener mediante 0 y 1-extensiones, ciertos tipos de 2-extensiones y división de vértice, y todas estas operaciones conservan la rigidez de cofactores. Se conjetura que esta maximalidad de la rigidez de cofactores es cierta en todas las dimensiones (Conjetura 1.3.18).

Esta parte concluye con el cálculo de los coeficientes del circuito  $K_{d+2}$  (Teorema 1.3.22).

La segunda parte de la memoria (capítulo 2) estudia las llamadas  $k$ -triangulaciones, y su relación con la rigidez.

Una  $k$ -triangulación es un conjunto maximal de aristas entre los vértices de un  $n$ -gono convexo tales que no hay  $k+1$  que se cortan dos a dos. Estas multitriangulaciones se pueden entender como *complejos de estrellas* (subsección 2.1.2): todos los ángulos de una estrella de  $2k+1$  lados contenida en una multitriangulación son ángulos de la multitriangulación (Lema 2.1.4), y todos los ángulos relevantes de la multitriangulación están en una estrella (Teorema 2.1.9). Dos estrellas siempre tienen una única bisectriz común (Teorema 2.1.8), y todas las aristas que no se usan en la multitriangulación son bisectriz común de un par de estrellas (Corolario 2.1.12).

Una  $k$ -triangulación en  $n$  vértices tiene  $n-2k$  estrellas,  $k(n-2k-1)$  aristas relevantes y  $k(2n-2k-1)$  aristas en total.

Se llama *flip* de una arista relevante  $e$  de una multitriangulación (subsección 2.1.3) a la operación consistente en cambiar la arista  $e$  por la bisectriz común de las dos estrellas que contienen a  $e$ . El flip de una arista en un conjunto libre da otro conjunto libre (Teorema 2.1.19), y en una multitriangulación da otra multitriangulación. Además, flipar una arista es la única forma de cambiarla.

Esto nos lleva a definir un “grafo de flips”, donde los vértices son las multitriangulaciones y las aristas los flips entre ellas. Este grafo es regular de grado  $k(n-2k-1)$  y conexo.

Otras operaciones en las multitriangulaciones (subsección 2.1.4) son la inflación de un cruce, que permite pasar de una multitriangulación en  $n$  vértices a otra en  $n+1$ , y su operación opuesta, el aplanamiento de una estrella, que pasa de  $n+1$  vértices a  $n$ .

El hecho de que el número de aristas de una  $k$ -triangulación sea exactamente  $k(2n-2k-1)$ , y que la condición de Laman se cumple para todas ellas, llevan a conjeturar que las  $k$ -triangulaciones son isostáticas en dimensión  $2k$  (Conjetura 2.2.3). Esta conjetura se puede formular de distintas formas: en la matroide de rigidez clásica o en la de cofactores, en posiciones genéricas en el plano, en posiciones genéricas en una cónica o curva de momentos, en posiciones arbitrarias en estas curvas o en posiciones arbitrarias convexas.

Para  $k = 1$  ya se sabe que es cierto, y para  $k = 2$  lo podemos demostrar para posiciones genéricas en una cónica, gracias a la división de vértice (Teorema 2.2.5).

Hemos intentado generalizar esta construcción para  $k > 2$ , pero la operación necesaria para ello no es tan fácil de manejar, y tiene casos donde es fácil ver que falla en la rigidez clásica, y alguno más complicado en la rigidez de cofactores (Ejemplos 2.2.6 a 2.2.8).

Otra forma de demostrar la rigidez de las multitriangulaciones es demostrando que los flips la conservan. Se conjetura que efectivamente es así en general y que además las dos aristas que se flipan tienen el mismo signo en el circuito contenido en el flip (Conjetura 2.2.10). Hemos demostrado que eso es cierto para cada multitriangulación en alguna posición de los vértices (Teorema 2.2.11).

El interés en que las dos aristas tengan el mismo signo viene de la relación con el *multiasociaedro* (subsección 2.2.2): el complejo simplicial formado por los conjuntos de aristas relevantes  $(k + 1)$ -libres. Se sabe que este complejo es una esfera simplicial, y de esta forma se demostraría que es un abanico (Teoremas 2.2.17 y 2.2.18). (Las conjeturas van más allá, diciendo que es un politopo.)

Finalmente, se tratan los casos de 2-triangulaciones con pocos vértices (subsección 2.2.3), exhaustivamente hasta  $n = 8$  y se estudian algunos ejemplos con  $n$  mayor.

Todos los resultados del capítulo 1 son conocidos, a excepción del mencionado Teorema 1.3.11 y la subsección 1.3.4. En el capítulo 2, la sección 2.1 resume los resultados más importantes de [8]. La sección 2.2.1 parte del teorema 8.7 de [8], que demuestra la 4-rigidez clásica de las 2-triangulaciones, pero la adapta al caso de la rigidez de cofactores y además incluye el estudio de los signos en los circuitos dados por los flips, un aspecto fundamental si se quiere realizar geométricamente el multiasociaedro (que es el problema principal que motiva esta memoria). En particular, el resultado 2.2.11 es original. Las secciones 2.2.2 y 2.2.3 también son en su mayor parte originales, incluyendo los teoremas 2.2.17 y 2.2.18.

# 1 Rigidez

## 1.1. Matroides de rigidez

Puesto que vamos a modelizar la rigidez a través de matroides, comenzaré recordando la definición general de qué es una matroide.

**Definición 1.1.1.** Una *matroide*  $M$  es un par  $(E(M), I(M))$ , donde  $E(M)$  es un conjunto finito e  $I(M)$  es una familia de subconjuntos de  $E(M)$  que cumple las siguientes condiciones:

$$\emptyset \in I(M) \quad (I1)$$

$$X \in I(M), Y \subset X \Rightarrow Y \in I(M) \quad (I2)$$

$$X \in I(M), Y \in I(M), |Y| > |X| \Rightarrow \exists y \in Y \setminus X : X \cup \{y\} \in I(M) \quad (I3)$$

Los conjuntos de  $I(M)$  se llaman *independientes*, y los subconjuntos de  $E$  que no están en  $I(M)$  se llaman *dependientes*.

**Definición 1.1.2.** Sea  $M$  una matroide.

- Se llama *circuito* a cualquier subconjunto de  $E(M)$  que sea dependiente minimal, es decir, que no está en  $I(M)$  pero todos sus subconjuntos propios sí. El conjunto de los circuitos de  $M$  es por lo tanto

$$C(M) := \{X \subset E(M) : X \notin I(M), X \setminus \{x\} \in I(M) \quad \forall x \in X\}$$

- El *rango* de un conjunto  $X$  se define como

$$r_M(X) = \max\{|Y| : Y \in I(M), Y \subset X\}$$

- Una *base* de  $M$  es un subconjunto independiente maximal.
- La *clausura* de un conjunto  $X$  es el mayor conjunto  $\langle X \rangle_M$  que contiene a  $X$  tal que  $r(\langle X \rangle_M) = r(X)$ .

Sea  $V$  un conjunto finito cualquiera, que entendemos como vértices, y  $K$  el conjunto de pares de elementos de  $V$ , visto como las aristas entre esos vértices. Si  $E \subset K$ , lo que viene a ser un grafo, llamaré  $V(E)$  al conjunto de elementos de  $V$  que están en algún elemento de  $E$ . Si  $U \subset V$ , llamo  $K(U)$  al conjunto de pares de elementos de  $U$  (el “grafo completo” en  $U$ ).

**Definición 1.1.3.** Una matroide de rigidez en dimensión  $m$  es una matroide  $M = (K, I)$  que cumple:

1. Si  $|V(E) \cap V(F)| < m$ ,  $\langle E \cup F \rangle \subset K(V(E)) \cup K(V(F))$
2. Si  $\langle E \rangle = K(V(E))$ ,  $\langle F \rangle = K(V(F))$  y  $|V(E) \cap V(F)| \geq m$ ,  $\langle E \cup F \rangle = K(V(E \cup F))$

Si  $\langle E \rangle = K(V(E))$ , decimos que  $E$  es rígido, y si es rígido e independiente diremos que es isostático.

Por ejemplo, la matroide gráfica de un grafo completo es una matroide de rigidez en dimensión 1 (de hecho, es la única matroide de rigidez en dimensión 1). En esta matroide,  $\langle E \rangle$  es el conjunto de pares de vértices tales que entre ellos hay un camino en  $E$ . Si dos conjuntos de aristas no tienen vértices en común,  $\langle E \cup F \rangle$  solo contiene aristas en  $K(V(E))$  y  $K(V(F))$ . La definición de rígido es equivalente a conexo, y la unión de dos grafos conexos con al menos un vértice en común es conexo. Los conjuntos independientes son los bosques (uniones disjuntas de árboles).

**Definición 1.1.4.** Sea  $(V, E)$  un grafo,  $U \subset V$  con  $|U| = m + k$ , y  $F \subset E$  un conjunto de  $k$  aristas entre los vértices de  $U$ . Entonces decimos que el grafo dado por  $(V', E')$  es una  $k$ -extensión de  $E$  en dimensión  $m$ , donde  $V' = V \cup \{x\}$  y  $E' = E \setminus F \cup \{(x, u) : u \in U\}$ .

Por ejemplo, una 0-extensión consiste en añadir un vértice con  $m$  vecinos, una 1-extensión en añadir un vértice con  $m + 1$  vecinos y quitar una arista entre dos de ellos, y así sucesivamente.

**Lema 1.1.5.** Si  $E' = E \cup \{(x, u_1), (x, u_2), \dots, (x, u_k)\}$  con  $k < m$ ,  $r(E') = r(E) + k$ , donde la función de rango corresponde a una matroide de rigidez  $m$ -dimensional.

En concreto, si  $E'$  es una 0-extensión de  $E$ ,  $r(E') = r(E) + m$ .

*Demostración.* Sea

$$E_{k-1} = E \cup \{(x, u_1), (x, u_2), \dots, (x, u_{k-1})\}$$

Para cualquier  $k \leq m$ , aplicando la propiedad 1, tenemos

$$\langle E_{k-1} \rangle \subset K(V(E)) \cup K(\{x, u_1, \dots, u_{k-1}\})$$

Este conjunto no contiene a  $(x, u_k)$ , por lo tanto  $r(E_k) > r(E_{k-1})$  y

$$r(E') = r(E_k) \geq r(E_0) + k = r(E) + k \geq r(E) + r(E' \setminus E) \geq r(E') \quad \square$$

Esto permite deducir el rango de una matroide de rigidez, dado su número de vértices.

**Teorema 1.1.6.** Sea  $M = (K, I)$  una matroide de rigidez y  $n = |K|$ .

$$r(K) = \begin{cases} \binom{n}{2} & \text{si } n \leq m + 1 \\ mn - \binom{m+1}{2} & \text{si } n \geq m + 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, ese es el rango que tiene que tener un grafo con  $n$  vértices para ser rígido.

*Demostración.* Aquí llamaré  $K_n$  al grafo completo en  $n$  vértices. La primera parte resulta de una aplicación repetida del lema anterior, ya que  $K_n$  se obtiene añadiendo a  $K_{n-1}$  un vértice con  $n - 1$  aristas.

Para la segunda parte, sea

$$E_j = K_m \cup \{(u, v) : u \leq m, m + 1 \leq v \leq m + j\}$$

Sabemos que  $E_0$  es independiente por la primera parte (tiene  $\binom{n}{2}$  aristas), y cada  $E_j$  es una 0-extensión del anterior, así que  $r(E_k) = r(E_0) + km = |E_0| + km = |E_k|$  y  $E_k$  es independiente. También  $E_0$  es rígido (por ser completo), y aplicando sucesivamente la propiedad 2,  $E_j$  es rígido (es la unión de dos conjuntos rígidos con  $m$  vértices en común:  $E_{j-1}$  y  $K(\{1, \dots, m, m + j\})$ ). Con esto tenemos que  $E_k$  es isostático, y su número de aristas coincide con su rango, que es el rango de  $K_n$ .  $\square$



**Corolario 1.1.7.** 1. En todo grafo independiente, hay algún vértice de grado menor que  $2m$ .

2. En todo grafo rígido, todos los vértices tienen grado mayor o igual que  $m$ .

*Demostración.* Si el grafo es independiente, como mucho tiene  $mn - \binom{m+1}{2}$  aristas, así que la suma de grados de los vértices es menor que  $2mn$  y la primera parte se sigue.

Si el grafo tiene un vértice de grado menor que  $m$ , aplicando la propiedad 1 a las aristas de ese vértice, por un lado, y al resto de aristas por otro, obtenemos que la clausura del grafo no puede ser el grafo completo, así que no es rígido.  $\square$

**Definición 1.1.8.** Dado un grafo  $G = (V, E)$  con  $n$  vértices decimos que  $G$  es de Laman en dimensión  $m$  si, para cualquier  $U \subset V$ , el número de aristas entre los vértices de  $U$  es como mucho  $m|U| - \binom{m+1}{2}$ .

**Proposición 1.1.9.** Si un grafo  $G$  es independiente en una matroide de rigidez en dimensión  $m$ ,  $G$  es de Laman en dimensión  $m$ .

*Demostración.* Por ser  $(V, E)$  independiente, cualquier subgrafo suyo también, luego el número de aristas entre vértices de  $U$  es como mucho el rango de la matroide restringida a los vértices de  $U$ , que es  $m|U| - \binom{m+1}{2}$ .  $\square$

Como veremos más adelante (Teorema 1.2.11) para la rigidez genérica en dimensión dos el recíproco de la Proposición 1.1.9 es cierto, pero en dimensión mayor no. De hecho, en dimensión mayor los grafos de Laman no forman una matroide.

**Teorema 1.1.10.** Un grafo es independiente (resp. rígido, isostático) en una matroide de rigidez si y solo si cualquier 0-extensión del grafo es independiente (resp. rígida, isostática).

*Demostración.* La extensión es independiente si y solo si su rango coincide con el número de aristas, lo que es equivalente a que coincidan en el grafo original ya que los dos cambian en  $m$  (por el lema 1.1.5, el rango del grafo aumenta en  $m$  al hacer una 0-extensión). Como al menos hay  $m$  vértices, el rango necesario para ser rígido también aumenta en  $m$ , así que la rigidez del grafo antes y después de la extensión es equivalente. Lo mismo si es isostático, ya que eso quiere decir independiente y rígido.  $\square$

En general, siempre es cierto que una  $k$ -extensión se puede deshacer.

**Teorema 1.1.11.** Sea  $(V, E)$  un grafo independiente en una matroide de rigidez,  $u$  un vértice de grado  $m + k$ , para un cierto  $k \geq 0$ , y  $F$  el conjunto de las aristas que salen de  $u$  y  $S$  el conjunto de vecinos de  $u$ . Entonces, existe un conjunto  $G \subset K(S) \setminus E$ , con  $|G| = k$ , tal que  $(E \setminus F) \cup G$  es independiente.

*Demostración.* Lo demostraré por inducción sobre  $k$ . Para  $k = 0$  ya lo tenemos. Supongamos que es cierto para  $k$  y veamos  $k + 1$ . Para ello, sea  $v$  un vecino de  $u$ ,  $E' = E \setminus \{(u, v)\}$  y  $S' = S \setminus \{v\}$ . Las aristas entre los vecinos de  $u$  no pueden estar todas implicadas por  $E'$ , ya que entonces tendríamos que  $K(S) \subset \langle E' \rangle$  y  $K(S' \cup \{u\}) \subset \langle E' \rangle$ , y siendo dos conjuntos de vértices con  $m$  o más puntos en común,  $K(S \cup \{u\}) \subset \langle E' \rangle$  y en concreto la arista  $(u, v)$  estaría implicada por el resto, contradicción con que  $E$  es independiente.

Por lo tanto, debe haber una arista en  $K(S)$  que no está en la clausura de  $E'$ , llamémosla  $(i, j)$ . Sea ahora  $E'' = E' \cup \{(i, j)\}$ . Por lo que sabemos  $E''$  es independiente, y  $u$  tiene grado  $m + k$  en  $E''$ , así que le podemos aplicar la hipótesis inductiva a  $E''$  y obtenemos un conjunto  $G'$  tal que  $(E'' \setminus F) \cup G'$  es independiente, y entonces  $(E \setminus F) \cup G$  es independiente, donde  $G = G' \cup \{(i, j)\}$ .  $\square$

Una consecuencia de esto es la existencia de las llamadas secuencias de Henneberg.

**Definición 1.1.12.** Una *secuencia de Henneberg* es una secuencia de grafos en  $m$  dimensiones tales que el grafo inicial es el completo en  $m$  vértices y cada grafo se obtiene del anterior por una  $k$ -extensión para  $k < m$ .

**Corolario 1.1.13.** *Cualquier grafo isostático en  $m$  o más vértices, en cualquier matroide de rigidez, se puede obtener a partir del grafo completo en  $m$  vértices mediante una secuencia de Henneberg.*

*Demostración.* Veámoslo por inducción sobre el número de vértices. Si hay  $m$ , el grafo debe ser completo y hemos terminado. Si hay más de  $m$ , por el teorema 1.1.7 hay algún vértice con grado entre  $m$  y  $2m - 1$ . Por el teorema anterior es posible deshacer una extensión en ese vértice, obteniendo un grafo con un vértice menos. Este grafo es independiente y el número de aristas ha bajado exactamente en  $m$ , luego es isostático, le podemos aplicar la hipótesis inductiva y sacar así una secuencia de extensiones. Rehaciendo la extensión deshecha, tenemos la secuencia que buscamos.  $\square$

Sin embargo, las secuencias de Henneberg no siempre producen grafos isostáticos, como veremos más adelante (secciones 1.2 y 1.3).

## 1.2. Rigidez clásica

### 1.2.1. Introducción y resultados generales

Llamo *realización* de un grafo  $(V, E)$  a una colocación de los vértices del grafo en  $\mathbb{R}^d$ , es decir  $(V, E, p)$  con  $p : V \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

**Definición 1.2.1.** Sea  $(V, E, p)$  una realización de un grafo y  $v : V \rightarrow \mathbb{R}^d$  un movimiento infinitesimal, es decir, una asignación de velocidades a cada vértice.

- $v$  es una *flexión* de  $(V, E, p)$  si

$$(p_i - p_j) \cdot (v(i) - v(j)) = 0 \quad \forall (i, j) \in E \quad (1.1)$$

- $v$  es una *flexión trivial* de  $(V, E, p)$  si

$$(p_i - p_j) \cdot (v(i) - v(j)) = 0 \quad \forall i, j \in V \quad (1.2)$$

- $v$  es una *deformación infinitesimal* si es una flexión no trivial.
- $(V, E, p)$  es una realización *infinitesimalmente rígida* si todas sus flexiones son triviales, es decir, si no tiene deformaciones infinitesimales.

La matriz de coeficientes del sistema (1.2) es

$$A(p) = \begin{pmatrix} p_1 - p_2 & p_2 - p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_1 - p_3 & 0 & p_3 - p_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ p_1 - p_n & 0 & 0 & \dots & 0 & p_n - p_1 \\ 0 & p_2 - p_3 & p_3 - p_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{n-1} - p_n & p_n - p_{n-1} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

La matriz del sistema (1.1) es una submatriz por filas de  $A(p)$ , que contiene solo las filas correspondientes a  $E$ : la llamaré  $A_E(p)$ . De esta forma,  $A(p) = A_{K_n}(p)$  es la matriz del grafo completo. Por definición, el espacio de las flexiones triviales es  $R = \ker A(p)$  y el de las flexiones es  $M = \ker A_E(p)$ , por lo tanto  $\dim R = dn - \text{rg } A(p)$  y  $\dim M = dn - \text{rg } A_E(p)$ .

**Proposición 1.2.2.** *Una realización  $(V, E, p)$  es infinitesimalmente rígida si y solo si  $\text{rg } A_E(p) = \text{rg } A(p)$ .*

**Definición 1.2.3.** Una realización  $(V, E, p)$  es *libre de autotensiones*, o *independiente*, si  $\text{rg } A_E(p) = |E|$ , es decir, si las filas son independientes.

**Proposición 1.2.4.** *Una fila de la matriz  $A(p)$ , correspondiente a  $(i, j)$ , depende linealmente de un conjunto  $E$  de filas/aristas si y solo si todas las flexiones de  $E$  dejan invariante la longitud de  $(i, j)$ .*

*Demostración.*  $(i, j)$  depende linealmente de  $E$

$$\iff \text{rg } A_E(p) = \text{rg } A_{E'}(p), \text{ donde } E' = E \cup \{(i, j)\}$$

$$\iff \dim M_E = mn - \text{rg } A_E(p) = mn - \text{rg } A_{E'}(p) = \dim M_{E'}$$

$$\iff \text{todas las flexiones de } M_E \text{ lo son de } M_{E'}$$

$$\iff \text{todas las flexiones de } M_E \text{ dejan invariante la longitud de } (i, j). \quad \square$$

También se puede considerar  $A$  como una matriz de polinomios en  $\mathbb{R}[p_{ij}]$ , en lugar de como una matriz  $A(p)$  para cada valor de  $p$ . A la rigidez en ese sentido se la llama genérica, porque se corresponde con la rigidez asociada a  $p$  suficientemente general, y solo depende del grafo  $(V, E)$ , no de  $p$ .

Para demostrar que la rigidez clásica es un caso particular de matroide de rigidez, vamos primero a ver que cumple el Teorema 1.1.6.

**Teorema 1.2.5.**

$$\text{rg } A = \begin{cases} \binom{n}{2} & \text{si } n \leq d+1 \\ dn - \binom{d+1}{2} & \text{si } n \geq d+1 \end{cases}$$

Además, si los puntos de  $p$  generan afínmente  $\mathbb{R}^d$ , es decir, no están todos en el mismo hiperplano,  $\text{rg } A(p) = \text{rg } A$ .

*Demostración.* Considero primero el caso  $n \leq d+1$ . Veamos que en este caso la matriz tiene rango máximo (que es  $\binom{n}{2}$ , el número de filas). Tomo una colocación  $p$  de los vértices que genera afínmente  $\mathbb{R}^d$ . Entonces, si existiera una combinación lineal de las filas con coeficientes  $(s_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$ , con algún  $s_{ij} \neq 0$ , se tendría, sumando las  $m$  columnas correspondientes al vector  $i$ ,

$$s_{i1}(p_i - p_1) + s_{i2}(p_i - p_2) + \dots + s_{in}(p_i - p_n) = 0$$

lo cual es una contradicción, porque esos vectores son linealmente independientes (ya que generan  $\mathbb{R}^d$ ). Por lo tanto  $A(p)$  tiene rango máximo y  $A$  también debe tener rango máximo.

Sea ahora  $n \geq d+1$ . El caso  $n = d+1$  ya lo hemos resuelto, y el rango resulta ser  $\binom{d+1}{2}$ , por lo tanto  $\dim R = d(d+1) - \binom{d+1}{2} = \binom{d+1}{2}$ . Dado  $(V, E, p)$ , con  $p$  en posición general y  $|V| > m+1$ , tomo  $U \subset V$  con  $|U| = d+1$ . Los puntos de  $p(U)$  forman una referencia afín de  $\mathbb{R}^d$ . Si  $R'$  es el espacio de flexiones triviales de  $U$ , está claro que una flexión trivial de  $V$  restringida a  $U$  es una flexión trivial de  $U$ . Ahora veamos que cada flexión trivial de  $U$  se extiende de forma única a una flexión trivial de  $V$ .

Sea  $L : R \rightarrow R'$  la restricción. Veamos que  $L$  es inyectiva. Supongamos  $L(r) = L(r')$ , es decir,  $r$  y  $r'$  coinciden en  $U$ . Sea  $U = \{1, 2, \dots, d\}$  y  $j \in V \setminus U$  tal que  $p_j$  que no quede en el hiperplano de  $p_1, p_2, \dots, p_d$ . Entonces, para  $i \in U$ ,

$$(p_j - p_i) \cdot (r_j - r_i) = 0$$

y

$$(p_j - p_i) \cdot (r'_j - r'_i) = (p_j - p_i) \cdot (r'_j - r_i) = 0$$

por lo tanto

$$(p_j - p_i) \cdot (r'_j - r_j) = 0$$

Esto es,  $r'_j - r_j$  es perpendicular a  $p_j - p_i$  para todo  $i \in U$ , es decir, a todos los vectores de una base, por lo tanto es 0 y  $r'_j = r_j$ . Si  $p_j$  está en el hiperplano, podemos hacer el mismo argumento usando otro vértice que no quede en el hiperplano (para el que ya sabemos que  $r = r'$ ). Por lo tanto, debe ser  $r = r'$  en todos los puntos y  $L$  es inyectiva.

De aquí se deduce que  $\dim R \leq \dim R' = \binom{d+1}{2}$ . Veamos ahora que en  $R$  hay  $\binom{d+1}{2}$  movimientos linealmente independientes. Voy a tomar para ello los movimientos  $t_i$  y  $r_{ij}$ :  $t_i$  es la traslación por el vector  $e_i$  y  $r_{ij}$  la rotación que mueve  $e_i$  en la dirección de  $e_j$ . Supongamos que tenemos una dependencia lineal entre estos movimientos. Entonces

$$\sum_{i=1}^d a_i t_i + \sum_{1 \leq i < j \leq d} b_{ij} r_{ij} = 0$$

Evaluando en el 0, tenemos

$$\sum_{i=1}^d a_i e_i = 0$$

luego  $a_i = 0$  para todo  $i$ . Evaluando en  $e_i$ ,

$$\sum_{j \neq i} b_{ij} e_j = 0$$

(donde he tomado  $b_{ji} = -b_{ij}$ ), luego  $b_{ij} = 0$ .

Por lo tanto,  $\dim R = \dim R' = \binom{d+1}{2}$  y  $\text{rg } A = dn - \binom{d+1}{2}$ . □

Una consecuencia de este último resultado es que las flexiones triviales son las traslaciones y rotaciones infinitesimales, cuya dimensión ya es  $\binom{d+1}{2}$ .

Es posible definir una matroide a partir de las filas de la matriz de rigidez. Esta matroide, como cabría esperar, es una matroide de rigidez.

**Teorema 1.2.6.** *Para cualquier  $p$  en posición general en dimensión  $d$ , la matroide lineal asociada a las filas de la matriz  $A(p)$  es una matroide de rigidez en dimensión  $m = d$ , cuyos conjuntos rígidos son precisamente los conjuntos infinitesimalmente rígidos de aristas y lo mismo los independientes.*

*Demostración.* Ya sabemos que es una matroide. Falta ver que es una matroide de rigidez. En primer lugar, la clausura de un conjunto  $E$  de aristas son aquellas cuya fila es combinación lineal de las filas correspondientes  $E$ , que, por la proposición 1.2.4, son justamente las que no cambian de longitud al mover  $E$  (en adelante, las llamaré *aristas implicadas* por  $E$ ).

Supongamos primero  $|V(E) \cap V(F)| < m$ . Sea  $(i, j) \in \langle E \cup F \rangle$ . Si  $i$  o  $j$  no está en  $V(E)$  ni en  $V(F)$ , podemos mover el otro extremo de cualquier manera y cambiaría la

longitud, lo cual es contradictorio. Si  $i$  y  $j$  están los dos en  $V(E)$  o en  $V(F)$ ,  $(i, j)$  está en  $K(V(E)) \cup K(V(F))$  como queremos demostrar. Solo queda el caso de que  $i$  está en  $V(E)$  y  $j$  en  $V(F)$  (o al revés).

Como  $|V(E) \cap V(F)| \leq m - 1$ , existe una variedad afín  $L$  de dimensión  $m - 2$  que contiene a la imagen de esos puntos por  $p$ . Sea  $r$  la rotación infinitesimal de eje  $L$ , y  $u$  una flexión trivial definida por

$$u(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in V(E) \\ r(k) & \text{si } k \in V(F) \end{cases}$$

Esto está bien definido ya que  $r(k)$  es 0 en los puntos de  $L$  y es un movimiento de  $E \cup F$  por serlo 0 y  $r$ . La arista  $(i, j)$  no debe cambiar su longitud, y  $u(i) = 0$ , por lo tanto  $u(j) = r(j)$  es perpendicular a  $p_i - p_j$ . Pero  $r(j)$  también es perpendicular al hiperplano  $H$  que contiene a  $L$  y  $p_j$ , así que  $p_i - p_j$  está en la dirección de  $H$  y  $p_i$  está en  $H$ , contradicción con que  $p$  está en posición general (habría  $m + 1$  puntos en un hiperplano).

Suponemos ahora que  $E$  y  $F$  son rígidos y  $|V(E) \cap V(F)| \geq m$ . Tenemos que demostrar que  $E \cup F$  es rígido. Sea  $u$  un movimiento de  $E \cup F$ . Entonces  $u|_E$  es un movimiento de  $E$  y como  $E$  es rígido, es un movimiento rígido, y de la misma forma  $u|_F$  es un movimiento rígido de  $F$ . Ahora bien, por el teorema 1.2.5,  $u|_E$  es una combinación lineal de traslaciones y rotaciones infinitesimales y lo mismo  $u|_F$ . Como estos dos movimientos coinciden en al menos  $m$  puntos, deben coincidir en todos, y  $u$  es un movimiento rígido como queríamos demostrar.  $\square$

Dada una función  $p : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ , llamo  $G(p)$  a la matroide lineal de las filas de  $A(p)$  y  $G_m(n)$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , a la matroide lineal de las filas de  $A$  (que coincide con las de  $A(p)$  para  $p$  genérica).

**Proposición 1.2.7.** *Cualquier conjunto independiente en  $G(p)$  es independiente en  $G_m(n)$ .*

*Demostración.* Si hubiera una dependencia entre las filas de  $G_m(n)$ , se seguiría cumpliendo en  $G(p)$ .  $\square$

En esta matroide de rigidez genérica, las 1-extensiones conservan la rigidez, algo que no ocurre en general. Por ejemplo,  $K_{3,3}$  se puede obtener fácilmente por tres 1-extensiones de  $K_3$ , pero el Teorema 1.3.9 implica que no es rígido si los seis vértices están en una cónica.

**Teorema 1.2.8.** *Si un grafo es independiente (resp. rígido, isostático) en  $G_m(n)$ , cualquier 1-extensión del grafo es independiente (resp. rígida, isostática).*

*Demostración.* Sea  $U = \{1, 2, \dots, m + 1\}$  y 0 el nuevo vértice. Sea  $E \cup \{1, 2\}$  el conjunto de aristas del grafo inicial  $G$ . Supongamos que es independiente, y veamos que el grafo final,  $E \cup \{(0, 1), \dots, (0, m + 1)\}$ , es independiente también. Sea  $p$  una colocación genérica con  $p_1 = 0$  y  $p_i = e_{i-1}$ , para  $2 \leq i \leq m + 1$ , y  $u$  una flexión trivial de  $E$  que cambia la distancia entre 1 y 2. Entonces le podemos dar un valor a  $u_0$  que cumple

$$(u_0 - u_i) \cdot (p_0 - p_i) = (u_0 - u_i) \cdot (p_0 - e_{i-1}) = 0$$

para todos los  $i$  a partir de 2, con lo que obtenemos una flexión trivial de  $E \cup \{(0, 2), \dots, (0, m)\}$  (que es de hecho una 0-extensión de  $E$ , por lo tanto independiente).

Ahora sea  $x_i = (u_i - u_1) \cdot p_i$ , y veamos que  $x_0$  no es siempre cero (es decir, la arista  $(0, 1)$  no está implicada por el resto, y el grafo es independiente, como queremos demostrar). Tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= (u_0 - u_i) \cdot (p_0 - e_{i-1}) = (u_0 - u_i) \cdot p_0 - (u_0 - u_i) \cdot e_{i-1} \\ &= x_0 + (u_1 - u_i) \cdot p_0 + x_i - (u_0 - u_1) \cdot e_{i-1} \end{aligned}$$

Escrito como una ecuación matricial,

$$(x_0 + x_2, \dots, x_0 + x_{m+1})^T + Qp_0 - (u_0 - u_1) = 0$$

donde  $Q$  tiene como filas los  $u_1 - u_i$ , y

$$\begin{aligned} x_0 &= (u_0 - u_1)^T p_0 = ((x_0 + x_2, \dots, x_0 + x_{m+1})^T + Qp_0)^T p_0 = \\ &= x_0(1, 1, \dots, 1)^T p_0 + (x_2, \dots, x_{m+1})^T p_0 + p_0^T Q^T p_0 \end{aligned}$$

y

$$(x_2, \dots, x_{m+1})^T p_0 + p_0^T Q^T p_0$$

es un polinomio cuadrático en  $p_0$  que debe ser distinto de 0 porque  $x_2 \neq 0$ . Como  $p$  es una posición genérica, podemos suponer que aquí no vale 0, y entonces  $x_0 \neq 0$ , como queríamos demostrar.

Si el grafo original es rígido y el extendido no lo es, este último admite una deformación, que no es una deformación del original: la única posibilidad es que la arista  $(1, 2)$  cambie de longitud, luego tenemos un movimiento infinitesimal en la misma situación del  $u$  anterior y se sigue que la arista  $(0, 1)$  también cambia de longitud, lo cual es absurdo.  $\square$

Este resultado permite caracterizar la independencia y rigidez en dimensión 2, ya que no solo cualquier grafo isostático sale por una secuencia de Henneberg, sino que las secuencias dan siempre grafos isostáticos.

**Teorema 1.2.9** (Caracterización de Henneberg). *Un grafo es isostático en  $G_2(n)$  si y solo si se obtiene a partir de una arista por una secuencia de Henneberg.*

*Demostración.* Si el grafo es isostático, ya sabemos que siempre se obtiene por una secuencia.

Si el grafo se puede obtener de esta forma, por los teoremas 1.1.10 y 1.2.8 tenemos que es independiente. En cada extensión ganamos un vértice y dos aristas, por lo tanto  $2n - |E|$  no cambia. Inicialmente vale 3 así que siempre va a valer 3, y  $r(E) = |E| = 2n - 3$  como queríamos demostrar.  $\square$

**Corolario 1.2.10.** *La matroide  $G_2(n)$  es la única matroide de rigidez maximal en dimensión dos, es decir, cualquier conjunto que sea libre en una matroide de 2-rigidez cualquiera es libre en esta matroide.*

La condición de Laman también es suficiente en este caso.

**Teorema 1.2.11** (Caracterización de Laman). *Un grafo  $(V, E)$  es independiente en  $G_2(n)$  si y solo si para cualquier  $U \subset V$ , el número de aristas entre los vértices de  $U$  es como mucho  $2|U| - 3$ .*

*Demostración.* Si el grafo es independiente, cualquier subgrafo suyo también, así que como mucho tiene  $r(G_2(|U|)) = 2|U| - 3$  aristas.

Supongamos ahora que la condición se cumple. Voy a hacer inducción sobre  $n$ . Para  $n = 2$  hay 1 arista así que no hay nada que demostrar. Supongo que es cierto para  $n$  vértices y lo demuestro para  $n + 1$ .

Si hay algún vértice  $u$  de grado menor o igual que 2, aplicando la hipótesis inductiva a  $V \setminus \{u\}$ , tengo que es independiente. Entonces  $(V, E)$  está contenido en una 0-extensión suya que debe ser independiente.

Si no lo hay, todos los vértices tienen grado al menos 3 y debe haber alguno de grado exactamente 3 (si no el número total de aristas sería al menos  $2(n+1)$ ). Sea  $u$  este vértice e  $i, j, k$  sus vecinos. Si el grafo  $(V', E')$  con  $V' = V \setminus \{u\}$ ,  $E' = E \setminus \{(u, i), (u, j), (u, k)\} \cup \{(i, j)\}$ , es independiente,  $(V, E)$  es una 1-extensión suya que es independiente. Lo mismo pasa si en vez de  $(i, j)$  pongo  $(i, k)$  y  $(j, k)$ . Voy a suponer entonces que son los tres dependientes.

Aplicando a los tres la hipótesis inductiva, obtenemos que existen  $E_1, E_2$  y  $E_3$  contenidos en  $E \cup \{(i, j)\}$ ,  $E \cup \{(i, k)\}$  y  $E \cup \{(j, k)\}$  respectivamente que tienen más aristas de la cuenta. Necesariamente las propias aristas  $(i, j)$ ,  $(i, k)$  y  $(j, k)$  están en  $E_1, E_2$  y  $E_3$ , si no se violaría la condición para  $E$ . Sea  $n_i$  el número de vértices de  $E_i$ . Su número de aristas debe ser, entonces,  $2n_i - 2$ . Si  $F_i$  es  $E_i$  menos la arista añadida,  $|F_i| = 2n_i - 3$ . Como estos  $F_i$  están contenidos en el grafo original sin el vértice  $u$ , son independientes (por hipótesis inductiva), y por el número de aristas también son rígidos.

Ahora bien,  $F_1$  y  $T$ , el triángulo de vértices  $ijk$ , tienen dos vértices en común, así que su unión  $F_1 \cup T$  es rígida. Repitiendo este paso, tenemos que  $F_1 \cup F_2 \cup T$  y después  $F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup T$  son rígidos. En este último, las aristas de  $T$  son implicadas por las de cada  $F_i$  (debido a que estos son rígidos), luego  $F_1 \cup F_2 \cup F_3$  es rígido ya de por sí, y  $|F_1 \cup F_2 \cup F_3| \geq 2t - 3$  ( $t$  es su número de vértices). Pero esto implica

$$|F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \{(u, i), (u, j), (u, k)\}| \geq 2(t+1) - 2$$

y hemos llegado a una contradicción.  $\square$

Esto demuestra también que  $G_2(n)$  es la matroide de rigidez maximal. En 3 dimensiones no es tan fácil, porque no está demostrado que la 2-extensión conserve la independencia/rigidez.

Otra operación que conserva la rigidez es la división de vértice.

**Definición 1.2.12.** Dado un grafo  $(V, E)$ , un vértice  $u \in V$  y conjuntos disjuntos  $U_1$  y  $U_2$  de vecinos de  $u$  con  $|U_2| = m - 1$ , la *división del vértice*  $u$  es el grafo  $(V', E')$  con  $V' = V \cup \{v\}$  y  $E' = E \setminus \{(u, t) : t \in U_1\} \cup \{(v, t) : t \in U_1 \cup U_2\} \cup \{(u, v)\}$ .

**Teorema 1.2.13.** *La división de vértice conserva la independencia y la rigidez en  $G_m(n)$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $(V, E)$  es independiente y sea  $p$  una colocación genérica del grafo. Voy a definir una colocación de  $(V', E')$  en la que también es independiente.

Para ello, mantengo todos los vértices en la misma posición en que estaban y pongo  $v$  en la misma posición que  $u$ . Sea  $B$  la matriz obtenida a partir de  $A_{E'}(p)$  cambiando la fila correspondiente a  $(u, v)$ , que es 0, por un vector cualquiera  $q$  de  $\mathbb{R}^d$  en las posiciones que corresponden a  $u$  y  $v$ . Veamos que esta matriz tiene las filas independientes. Para ello, considero una combinación lineal de las filas de  $B$  que da 0. Entonces, identificando las aristas de  $u$  y  $v$ , y sumando las que son comunes a los dos (las de  $U_2$ ), obtenemos una tensión del grafo original.

Como los vértices están en la misma posición en  $V$  que en  $V'$ , la tensión se cancela en todos los vértices distintos de  $u$ . En  $u$ , se suman las contribuciones de  $v$  a  $U_1$ , las de  $u$  a  $U_3$  y las de  $u$  y  $v$  a  $U_2$ . Pero la suma de todas las contribuciones de  $u$  es  $kq$ , para algún  $k$ , y la suma de las de  $v$  es  $-kq$ , luego la tensión total es  $kq - kq = 0$ . Luego esto es una autotensión en  $(V, E)$ , que debe ser 0 porque el grafo original es independiente.

Por lo tanto, los coeficientes de las aristas de  $u$  a vértices de  $U_2$  son opuestos de los correspondientes de  $v$  y el resto deben ser 0 excepto quizá el de  $q$ . Los vectores  $\{(u, t) : t \in U_2\} \cup \{q\}$  son linealmente independientes, luego las tensiones en esas aristas deben ser 0, y lo mismo con  $v$ , de manera que la combinación lineal es 0, como queríamos demostrar.

Ahora, muevo el vértice  $v$  en la dirección de  $q$ :  $p_\epsilon(v) := p(u) + \epsilon q$ . La matriz de rigidez  $A_{E'}(p_\epsilon)$  de la colocación resultante tiene  $\epsilon q$  en la fila de  $(u, v)$ . Si  $B_\epsilon$  es esta matriz con la fila dividida por  $\epsilon$ , resulta que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} B_\epsilon = B$ , luego el rango de  $B_\epsilon$  es igual al de  $B$  para  $\epsilon$  suficientemente pequeño, y también tiene las filas independientes, así que  $A_{E'}(p_\epsilon)$  las tiene independientes, y hemos terminado.

Si el grafo original es rígido, como el conjunto formado por  $u$  y sus vecinos es libre, se puede extender a una base de la matroide. Al hacer la división en esta base, obtenemos un conjunto libre que también debe ser base, ya que se han añadido un vértice y  $m$  aristas. Por lo tanto, el grafo resultante también es rígido.  $\square$

**Observación 1.2.14.** Esta demostración necesita condiciones más débiles que “posición genérica”. En concreto, si  $(V, E)$  es independiente en ciertas posiciones,  $(V', E')$  es independiente con las mismas posiciones de los vértices antiguos y posición arbitraria para  $v$  dentro de una “bola perforada” suficientemente pequeña con centro en  $u$ .

### 1.2.2. Interpretación homológica de la rigidez

Es posible entender la rigidez clásica como una forma de homología. Para definir una homología, se toma una familia de módulos  $\{V_0, V_1, \dots, V_n\}$  sobre un cierto grupo  $G$  de coeficientes y se definen homomorfismos  $\partial_i : V_i \rightarrow V_{i-1}$ , donde  $V_{-1} = V_{n+1} = \{0\}$ , llamados *aplicaciones de borde*, que deben cumplir  $\text{Im } \partial_{i+1} \subset \ker \partial_i$ , es decir,  $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ . Entonces, se llama *grupo de homología de orden  $i$*  al cociente  $H_i = \ker \partial_i / \text{Im } \partial_{i+1}$ . Aquí vamos a tomar siempre  $G$  como el cuerpo  $\mathbb{R}$ , de modo que tanto los  $V_i$  como los grupos de homología son espacios vectoriales reales.

Por ejemplo, para la homología simplicial, partimos de un complejo simplicial y llamamos  $V_i = G^{C_i}$ , donde  $C_i$  es el conjunto de caras de dimensión  $i$  y  $G$  es cualquier grupo abeliano; el más habitual es  $\mathbb{Z}$ . Las aplicaciones de borde se definen de manera que mandan el vector unitario en un símple  $C \in C_i$  al vector que tiene coordenadas distintas de cero en los símlices contenidos en  $C_i$  con un elemento menos (facetas), y con signos adecuados, que se cancelan al iterar  $\partial$  dos veces. Como  $\partial_0$  es la aplicación nula,  $\ker \partial_0$  es el total, y  $\text{Im } \partial_1$  son las asignaciones de valores a los vértices que suman 0 en cada componente conexa, de modo que el grupo de homología de orden 0 es el espacio vectorial de dimensión igual al número de componentes conexas. De la misma forma, el grupo de orden 1 es el espacio vectorial generado por los ciclos de aristas que no son el borde de alguna superficie contenida en el complejo.

En la definición anterior de homología he tomado 0 como la primera dimensión, lo cual es arbitrario. Otra posibilidad es tomar  $V_i, i \geq 0$  como antes, pero añadir un espacio  $V_{-1} = \mathbb{R}$  y definir  $\partial_0$  como la aplicación que manda un vector a la suma de sus componentes. Los grupos de orden 1 y superiores no se ven afectados, pero el grupo de orden 0 ahora tiene una dimensión menos que el número de componentes conexas. (Además, ahora tiene sentido hablar de un grupo de orden -1, que es el trivial a no ser que el complejo sea vacío, en cuyo caso es  $\mathbb{R}$ .) En topología, a esto se le llama “homología reducida”.

Para asociar homología a rigidez, los grupos que nos sirven son:

$$\{0\} \rightarrow V_1 = \mathbb{R}^E \rightarrow V_0 = \mathbb{R}^{nd} \rightarrow V_{-1} = \mathbb{R}^{\binom{d+1}{2}} \rightarrow \{0\}$$

Y las aplicaciones:

- $\partial_0$  manda un elemento de  $\mathbb{R}^{nd} = \bigoplus_{i \in [n]} \mathbb{R}^d$ , entendido como una asignación de fuerzas



a cada vértice, a la resultante y al momento resultante de las fuerzas. Es decir,

$$\partial_0(f_1, f_2, \dots, f_n) = \left[ \left( \sum_{i=1}^n f_{ij} \right)_{1 \leq j \leq d}, \left( \sum_{i=1}^n (p_{ij} f_{ik} - p_{ik} f_{ij}) \right)_{1 \leq j < k \leq d} \right]$$

- $\partial_1$  manda un elemento de  $\mathbb{R}^E = \bigoplus_{e \in E} \mathbb{R}$ , es decir, una asignación de tensiones a las aristas (una tensión), a la suma, para cada vértice, de las fuerzas realizadas por las aristas que confluyen en el vértice. Es decir,

$$\partial_1((s_{ij})_{ij \in E}) = \left( \sum_{ij \in E} s_{ij} (p_i - p_j) \right)_{1 \leq i \leq n}$$

La matriz de esta aplicación es  $A_E(p)^T$ , la traspuesta de la matriz de rigidez (1.3), que a veces también se la llama matriz de rigidez.

Otra forma de ver esta cadena es mediante álgebra exterior. Dados un espacio vectorial  $V = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$  de dimensión  $n$ , su producto tensorial nos permite definir un álgebra:

$$T_n = \bigoplus_{s=1}^{\infty} V \otimes V \otimes \dots \otimes V = \bigoplus_{s=1}^{\infty} \langle \{e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_s} : 1 \leq i_j \leq n\} \rangle$$

Esta es un álgebra graduada, donde la parte de grado  $s$ ,  $T_n^s$ , tiene dimensión  $n^s$ . Sus elementos se pueden entender como formas multilineales (lineales si  $s = 1$ , bilineales si  $s = 2$ , etc.)

Para definir el *álgebra simétrica*  $S_n$ , nos quedamos solo con las formas multilineales simétricas. Esto equivale a tomar

$$S_n = T_n / \langle e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i : 1 \leq i, j \leq n \rangle$$

que identifica  $e_i \otimes e_j$  con  $e_j \otimes e_i$ : su clase se escribe  $e_i \wedge e_j$ . Estas formas simétricas pueden interpretarse como polinomios en  $n$  variables. La parte de grado  $s$  tiene ahora dimensión  $\binom{n+s-1}{s}$ .

El *álgebra exterior* es igual, pero tomando las formas antisimétricas, es decir, identificando  $e_i \otimes e_j$  con  $-e_j \otimes e_i$ , o también  $e_i \otimes e_i$  con 0:

$$\Lambda_n = T_n / \langle e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i : 1 \leq i, j \leq n \rangle = T_n / \langle e_i \otimes e_i : 1 \leq i, j \leq n \rangle$$

Ahora la clase de  $e_i \otimes e_j$  se escribe  $e_i \vee e_j$  y la dimensión de la parte de grado  $s$  es  $\binom{n}{s}$ . Como espacio vectorial, estas formas se corresponden con monomios libres de cuadrados, aunque no tienen la misma estructura como álgebra.

Volviendo a la homología, la cadena también se puede definir como

$$\{0\} \rightarrow V_1 = \bigoplus_{ij \in E} \langle p_i \vee p_j \rangle \rightarrow V_0 = \bigoplus_{i \in V} \langle q \vee p_i : q \in \mathbb{R}^{d+1} \rangle \rightarrow V_{-1} = \Lambda_{d+1}^2 \rightarrow \{0\}$$

$\Lambda_{d+1}^2$  es el grupo de las formas bilineales antisimétricas y tanto  $\langle p_i \vee p_j \rangle$  como  $\{q \vee p_i : q \in \mathbb{R}^{d+1}\}$  son subespacios vectoriales de él, de dimensiones 1 y  $d$  respectivamente (el segundo es isomorfo a  $\mathbb{R}^{d+1} / \langle p_i \rangle$ ). En particular, las aplicaciones  $\partial$  están inducidas por las inclusiones.

Esto es equivalente a lo anterior, ya que se puede interpretar  $p_i \vee p_j$  como la fuerza, de módulo unidad, que va a lo largo de la arista  $ij$ . De esta forma,  $V_1$  es el espacio de

fuerzas en las aristas,  $V_0$  el espacio de fuerzas sobre los vértices y  $V_{-1}$  el espacio de fuerzas y momentos en general.

Con esto, el grupo de homología de orden 1 es  $\ker \partial_1 / \text{Im } \partial_2 = \ker \partial_1$ , que son las tensiones cuya resultante es 0, también llamadas autotensiones. Entonces, una realización es libre si y solo si el grupo de homología de orden 1 es el trivial.

El grupo de orden 0 es  $\ker \partial_0 / \text{Im } \partial_1$ .  $\ker \partial_0$  son las fuerzas sobre los vértices que no mueven ni hacen girar el grafo, cuya dimensión es  $nd - \binom{d+1}{2}$ . La dimensión de  $\text{Im } \partial_1$  es el rango de  $A_E(p)$ , que es como mucho  $nd - \binom{d+1}{2}$  con igualdad si y solo si el grafo es rígido. Por lo tanto, una realización es rígida si y solo si el grupo de homología de orden 0 es el trivial. O sea:

**Proposición 1.2.15.** *Para la homología que acabamos de definir, el número de Betti  $\beta_0$  nos dice “cuántas aristas faltan para ser rígido” y el  $\beta_1$  dice cuántas “sobran para ser libre”.*

Otra forma de entender esta homología es mediante la cohomología correspondiente. Una cohomología se obtiene a partir de una homología cambiando cada espacio vectorial y cada aplicación por sus duales.

El dual de un espacio vectorial  $V$  sobre  $K$ ,  $V^*$ , es el espacio vectorial de las aplicaciones lineales de  $V$  a  $K$ . El dual de una aplicación  $f : U \rightarrow V$  es una aplicación  $f^* : V^* \rightarrow U^*$  que manda  $g \in V^*$  a  $g \circ f \in U^*$ . Su matriz es la traspuesta de la de  $f$ .

Con estos cambios, la cadena queda

$$\{0\} \leftarrow V_1^* = \mathbb{R}^E \leftarrow V_0^* = \mathbb{R}^{nd} \leftarrow V_{-1}^* = \mathbb{R}^{\binom{d+1}{2}} \leftarrow \{0\}$$

Y las aplicaciones son las duales de las de antes:

- $\delta_{-1} = \partial_0^*$  manda un elemento de  $\mathbb{R}^{\binom{d+1}{2}} \cong M_{(d+1) \times (d+1)}^{\text{anti}}(\mathbb{R})$ , es decir, las matrices (o equivalentemente, formas bilineales) antisimétricas de dimensión  $d+1$ , entendidas como rotaciones infinitesimales y traslaciones en  $d$  dimensiones, al efecto que tiene sobre los puntos:

$$\delta_{-1}(t_1, t_2, \dots, t_n, r_{12}, r_{13}, \dots, r_{n-1,n}) = \left( t_j + \sum_{k=1}^n p_{ik} r_{kj} \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d}$$

donde  $r_{ij} = -r_{ji}$  y  $r_{ii} = 0$ . Su imagen es  $R$ , el espacio de flexiones triviales.

- $\delta_0 = \partial_1^*$  manda un elemento de  $\mathbb{R}^{nd}$ , entendido como una asignación de velocidades a los puntos, al cambio de longitud que realizaría en una arista:

$$\delta_0(v_1, \dots, v_n) = [(p_i - p_j) \cdot (v_i - v_j)]_{ij \in E}$$

La matriz de esta aplicación es  $A_E(p)$ , la matriz de rigidez escrita en la forma (1.3). Su núcleo es  $M$ , el espacio de las flexiones.

El grupo de cohomología de orden 1 es  $\mathbb{R}^E / \text{Im } \delta_0$ , cuya dimensión es  $|E| - \text{rg } A_E(p)$ , la misma que la del grupo correspondiente de homología. El grupo de orden 0 es  $\ker \delta_0 / \text{Im } \delta_{-1} = M/R$ , es decir, el espacio de deformaciones, que tiene la misma dimensión que el grupo de homología de orden 0.

### 1.3. Rigidez de cofactores

#### 1.3.1. Definición y primeras propiedades

Existe otra forma de rigidez, que se llama *rigidez de cofactores*. Para definirla volvemos a las cadenas de homología de antes, pero cambiamos el álgebra exterior por el álgebra simétrica, es decir, formas multilineales simétricas (o, equivalentemente, polinomios). Además, en vez de fijar el grado en 2 y variar la dimensión del espacio, mantenemos la dimensión en 2 (usando coordenadas homogéneas, en 3) y variamos el grado de los polinomios.

De esta manera, defino  $V_{ij} = \langle \{l^s : l \in S_3^1, l(p_i) = l(p_j) = 0\} \rangle$ ,  $V_i = \langle \{l^s : l \in S_3^1, l(p_i) = 0\} \rangle$ . La cadena de homología que se obtiene es

$$\{0\} \rightarrow V_1 = \bigoplus_{ij \in E} V_{ij} \rightarrow V_0 = \bigoplus_{i \in V} V_i \rightarrow V_{-1} = S_3^s \rightarrow \{0\}$$

donde  $S_3^s$  es el espacio de los polinomios homogéneos de grado  $s$  en tres variables (que son las coordenadas homogéneas del plano proyectivo). Las aplicaciones de borde son las inducidas por las inclusiones, como antes.

Veamos cuál es el equivalente de la matriz de rigidez. Voy a dar coordenadas homogéneas a los puntos:  $p_i = (x_i, y_i, 1)$ . Tomo como base de  $V_1$  las potencias de formas lineales que se anulan en cada arista (de forma que la dimensión es  $|E|$ ), y como base de  $V_0$ , que es la suma de los  $V_i$ , los polinomios  $\{(y_i z - y)^s, s(x - x_i z)(y_i z - y)^{s-1}, \dots, (x - x_i z)^s\}$  para cada  $i$ . Entonces, si suponemos que el vértice  $i$ -ésimo es el origen, el polinomio que se anula en la arista  $ij$  es

$$(y_j x - x_j y)^s = \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} y_j^k x^k x_j^{s-k} (-y)^{s-k}$$

de forma que al aplicar  $\partial_1$  va a quedar, en la parte correspondiente al vértice  $i$ ,

$$(x_j^s, x_j^{s-1} y_j, \dots, y_j^s)$$

y en la parte correspondiente al vértice  $j$  los términos opuestos.

Haciendo lo mismo sin suponer que el vértice  $i$  es el origen, lo que sale es una traslación de lo anterior:

$$((x_j - x_i)^s, (x_j - x_i)^{s-1} (y_j - y_i), \dots, (y_j - y_i)^s)$$

Por lo tanto, la matriz de rigidez queda

$$\begin{pmatrix} c(p_2 - p_1) & -c(p_2 - p_1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c(p_3 - p_1) & 0 & -c(p_3 - p_1) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c(p_n - p_1) & 0 & 0 & \dots & 0 & -c(p_n - p_1) \\ 0 & c(p_3 - p_2) & -c(p_3 - p_2) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c(p_n - p_{n-1}) & -c(p_n - p_{n-1}) \end{pmatrix}$$

donde cada elemento es un vector fila con  $s + 1$  componentes, dados por

$$c(x, y) = (x^s, x^{s-1} y, \dots, x y^{s-1}, y^s) = x^s \left( 1, \frac{y}{x}, \dots, \left( \frac{y}{x} \right)^{s-1} \right) = x^s (1, m, \dots, m^{s-1}).$$

donde  $m$  es la pendiente del vector  $(x, y)$ . Como el factor  $x^s = (x_j - x_i)^s$  multiplica a toda la fila  $(i, j)$ , dividir por ese factor no cambia la matroide asociada a la matriz, y simplificará algunos de los cálculos más adelante. Es decir, tomamos:

$$C(p) = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_{12} & -\mathbf{m}_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mathbf{m}_{13} & 0 & -\mathbf{m}_{13} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{m}_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 & -\mathbf{m}_{1n} \\ 0 & \mathbf{m}_{23} & -\mathbf{m}_{23} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{m}_{n-1,n} & -\mathbf{m}_{n-1,n} \end{pmatrix},$$

donde hemos abreviado

$$\mathbf{m}_{ij} = \left(1, m_{ij}, \dots, m_{ij}^{s-1}\right) = \left(1, \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}, \dots, \left(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right)^{s-1}\right).$$

**Definición 1.3.1.** Dados  $n$  puntos  $p_1, \dots, p_n$  en el plano llamamos *matriz de cofactores* de grado  $s$  a  $C(p)$ . Llamamos *rigidez de cofactores* a la matroide de las filas de esta matriz (veremos más adelante que, en efecto, es una matroide de rigidez).

En esta forma de rigidez, lo que se ha dicho para la rigidez clásica sigue siendo cierto:

- La dimensión de  $V_1$  es igual al número de aristas. La de  $V_0$  es  $n(s+1)$ , y la de  $V_{-1}$  es  $\binom{s+2}{2}$ . Esto induce a pensar que  $s$  juega un papel similar a  $d-1$ , a pesar de que aquí siempre estamos en el plano.
- $\ker \partial_1$  son las autotensiones producidas por las aristas del grafo, donde ahora las “fuerzas” no se hacen en la dirección de la arista. Este grupo es isomorfo a  $\ker \delta_1 / \text{Im } \delta_0$ , y su dimensión es 0 si y solo si el grafo es libre en esta forma de rigidez.
- $\ker \partial_0 / \text{Im } \partial_1$  y  $\ker \delta_0 / \text{Im } \delta_{-1}$  tienen dimensión  $n(s+1) - \binom{s+2}{2} - \text{rg } C_E(p)$ . Podemos llamar a un grafo rígido si este grupo de homología (o de cohomología) es trivial. De hecho,  $\ker \delta_0$  puede entenderse como un espacio de “movimientos” de los vértices que no cambian de longitud las aristas (donde los conceptos de movimiento y cambio de longitud no son los de antes).  $\text{Im } \delta_{-1}$  son las flexiones triviales (obtenidas por una traslación o rotación en  $s+1$  dimensiones). Un grafo es rígido si solo admite las flexiones triviales.

Veamos que es la matroide de las filas de  $C(p)$  es una matroide de rigidez.

**Lema 1.3.2.** La  $0$ -extensión, con  $m = s+1$ , conserva la independencia y la rigidez en la matroide asociada a las filas de  $C(p)$ .

*Demostración.* Al añadir un vértice con  $s+1$  vecinos, la matriz tiene una submatriz cuadrada de tamaño  $s+1$  con ceros en el resto de las columnas, luego el rango total ha aumentado en el rango de esa matriz. Esta submatriz tiene la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & m_1 & \dots & m_1^s \\ 1 & m_2 & \dots & m_2^s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & m_{s+1} & \dots & m_{s+1}^s \end{pmatrix}$$

donde  $m_i$  es la pendiente de la recta que une  $p_0$  con  $p_i$ . En posición general las pendientes son distintas, y la matriz es la de Vandermonde de estas pendientes, por lo tanto su rango es  $s+1$ .  $\square$

**Teorema 1.3.3.** *La matroide de rigidez de cofactores para un conjunto de puntos tales que desde cada punto hay al menos  $s + 1$  pendientes distintas es efectivamente una matroide de rigidez.*

*Demostración.* Sean  $E$  y  $F$  dos conjuntos de aristas con menos de  $m$  vértices en común. De forma análoga a la rigidez clásica, hay una combinación distinta de 0 de las flexiones triviales que vale 0 en la intersección. Entonces el movimiento que vale 0 en  $E$  y esa combinación en  $F$  “cambia de longitud” las aristas que van de un vértice en  $V(E)$  a otro en  $V(F)$ , por lo tanto las aristas que van de  $V(E)$  a  $V(F)$  no están en la clausura de  $E \cup F$ .

Supongamos ahora que  $|V(E) \cup V(F)| \geq m$ . Sea  $E_0$  un grafo completo en  $m$  vértices de la intersección, que sabemos que es una base. Mediante 0-extensiones construyo un conjunto de aristas con los mismos vértices que  $E$ , al que llamo  $E'$ , y otro con los vértices de  $F$ , al que llamo  $F'$ . Ambos son bases de las matroides de rigidez en sus respectivos conjuntos de vértices, es decir,  $\langle E \rangle = \langle E' \rangle$  y  $\langle F \rangle = \langle F' \rangle$ . Por lo tanto, esto también es cierto con la unión:  $\langle E \cup F \rangle = \langle E' \cup F' \rangle$ . Pero  $E' \cup F'$  se obtiene a partir de  $E_0$  mediante 0-extensiones, luego también es una base y su clausura es  $K(V(E \cup F))$ .  $\square$

La rigidez de cofactores tiene una interpretación en lo que se refiere a splines: funciones polinómicas de un cierto grado, definidas a trozos, que deben ser derivables un cierto número de veces en las líneas de separación de los trozos.

**Teorema 1.3.4.** *Dado un grafo  $G = (V, E)$  y una realización  $p$  de  $G$ ,  $p$  es dependiente en la matroide de rigidez de cofactores en “dimensión”  $s + 1$  si y solo si existe una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , no idénticamente nula, que es polinómica de grado menor o igual que  $s$  en cada componente conexa del complemento del grafo, y derivable  $s - 1$  veces en todo  $\mathbb{R}^2$ .*

*Demostración.* Supongamos que esta función existe y vamos a encontrar una autotensión. Dada una arista  $e$ , la diferencia entre las dos funciones a ambos lados de  $e$  es un polinomio  $P_e$  de grado menor o igual que  $s$ . Por ser derivable  $s - 1$  veces,  $P_e$  debe valer 0 en  $e$ , así como sus derivadas hasta orden  $s - 1$ . Luego,  $P_e$  es un múltiplo de la potencia  $s$  de la forma lineal que se anula en  $e$ :  $P_e = c_e l_e^s$ . Por definición,  $\sum_{e \ni v} P_e = 0$ , luego esta combinación de formas lineales se anula en todos los vértices y los  $c_e$  forman una autotensión.

Supongamos ahora que existe una autotensión  $c_e$ , y voy a encontrar una función con las propiedades que buscamos. Asigno la función 0 a la región exterior al grafo. Llamo, igual que antes,  $l_e$  a la forma lineal que se anula en la arista. Dada una región  $R$ , sea  $(e_1, \dots, e_k)$  un camino que va de la región exterior a  $R$ . Defino

$$f|_R(x, y) = \sum_{i=1}^k c_{e_i} l_{e_i}^s$$

Por definición es un polinomio de grado  $s$  y derivable  $s - 1$  veces. Falta ver que la definición en  $R$  no depende del camino elegido para llegar a  $R$ . Sean  $(e_1, \dots, e_k)$  y  $(e_{k+l}, \dots, e_{k+l+1})$  dos caminos. Entonces la diferencia entre las dos sumas es igual a la suma de  $c_e l_e^s$  para los vértices que han quedado dentro del camino  $(e_1, \dots, e_{k+l})$ , que es 0 por ser los  $c_e$  una autotensión.  $\square$

**Teorema 1.3.5.** *Las siguientes operaciones conservan la independencia en la matroide genérica de cofactores:*

- 0-extensión: adición de un vértice de grado  $m = s + 1$ .

- *1-extensión: adición de un vértice de grado  $m + 1$  y supresión de una arista entre dos de sus vecinos.*
- *2-extensión en  $X$ : adición de un vértice de grado  $m + 2$  y supresión de dos aristas entre sus vecinos, sin vértices en común.*
- *2-extensión en doble  $V$ : adición de un vértice de grado  $m + 2$  y supresión de dos aristas entre sus vecinos, con un vértice en común (a estas aristas las llamamos “una  $V$ ”), con la condición de que siga siendo isostático si las dos aristas formaran otra  $V$  con otro vértice en común. (Es decir, esta operación parte de dos grafos en lugar de uno solo).*
- *División de vértice.*

*Demostración parcial.* Para la 0-extensión ya lo sabemos (teorema 1.1.10). Para la 1-extensión, partimos de un grafo  $(V = \{1, 2, \dots, n\}, E \cup \{(1, 2)\})$ , que suponemos libre, y llegamos a  $(V \cup \{0\}, E \cup \{(0, 1), (0, 2), \dots, (0, m + 1)\})$ . Dada una colocación genérica de  $V$ , definimos una colocación del nuevo grafo poniendo el vértice 0 alineado con el 1 y el 2. Entonces  $(V \cup \{0\}, E \cup \{(1, 2), (0, 2), \dots, (0, m + 1)\})$  es una 0-extensión del grafo original, por lo tanto libre, y esto no cambia al sustituir el par  $\{(1, 2), (0, 2)\}$  por  $\{(0, 1), (0, 2)\}$ , ya que las tres aristas son colineales.

La 2-extensión en  $X$  se demuestra de forma parecida: si se cambian las aristas  $(1, 2)$  y  $(3, 4)$  por  $(0, 1), (0, 2), \dots, (0, m + 2)$ , se coloca el vértice 0 alineado con  $(1, 2)$  y  $(3, 4)$ , se hace una 0-extensión uniendo el vértice 0 a  $2, 4, 5, \dots, m + 2$ , y se cambia el par  $(0, 2), (1, 2)$  a  $(0, 1), (0, 2)$ , y  $(0, 4), (3, 4)$  a  $(0, 3), (0, 4)$ .

La demostración de la 2-extensión en doble  $V$  es mucho más complicada. Está en [4]. La división de vértice se demuestra de forma análoga a la rigidez de barras y puntos (teorema 1.2.13).  $\square$

### 1.3.2. Relación con la rigidez clásica

**Teorema 1.3.6.** *Para  $s + 1 = d = 1$ , las matroides de rigidez clásica y de cofactores genéricas coinciden (son las matroides gráficas de  $K_n$ ). Para  $s + 1 = d = 2$ , y cualquier elección de puntos  $p_1, \dots, p_n$  en el plano, las matroides de rigidez clásica y de cofactores coinciden, en esa realización (en particular, también coinciden las genéricas).*

*Demostración.* Es trivial porque las matrices de rigidez tienen la misma forma. En el caso  $d = 1$ , una matriz tiene  $x_i - x_j$  donde la otra tiene 1, pero esa diferencia solo es una constante que multiplica a toda la fila. De hecho, en ese caso todas las posiciones son genéricas, siempre que no haya dos iguales. En el caso  $d = 2$ , las matroides sí dependen de la posición de los puntos, pero las dos matrices son la misma, así que las matroides también, tanto si son genéricas como si no.  $\square$

**Corolario 1.3.7** (Teorema de Maxwell-Cremona). *Dado una realización  $(V, E, p)$ , existe un levantamiento de los puntos (una forma de asignar alturas) que es lineal excepto en las aristas, donde es continua, si y solo si la realización es dependiente en 2 dimensiones.*

*Demostración.* Es el caso  $s = 1$  del teorema 1.3.4, que como hemos dicho implica la dependencia en la rigidez clásica en  $d = 2$ .  $\square$

Para  $s + 1 = d = 3$ , no se sabe si las dos matroides coinciden, aunque se cree que sí (Conjetura 1.3.17). Para  $s + 1 = d = 4$ , ya no coinciden, como vemos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.3.8.**  $K_{d+2,d+2}$  es un circuito en la matroide clásica para dimensión  $d \geq 4$ , pero es libre en la matroide de cofactores con  $s = d - 1$ .

Veamos primero el caso de la matroide clásica. Para ello, uso este teorema de Whiteley [1]:

**Teorema 1.3.9.** *La dimensión del espacio de flexiones no triviales de un grafo bipartito en la rigidez clásica es igual a la del espacio de cuádricas que pasan por todos sus vértices.*

En el caso de  $K_{d+2,d+2}$ , esta dimensión es  $2d + 4$  menos que la del espacio de todas las cuádricas, es decir

$$\binom{d+2}{2} - 2d - 4 = \frac{(d+2)(d-3)}{2}$$

Por lo tanto, el rango del grafo es

$$d(2d+4) - \binom{d+1}{2} - \frac{(d+2)(d-3)}{2} = d^2 + 4d + 3 = |E| - 1$$

Es decir, el grafo contiene un único circuito. Por simetría, el circuito debe ser todo el grafo.

Para la matroide de cofactores, en  $d = 4$  ( $s = 3$ ) se puede hacer una construcción de Henneberg, empezando por  $K_4$  en los vértices 1, 2, 3 y 7 y haciendo 0 y 1-extensiones y al final una 2-extensión en X:

$$\begin{aligned} & \rightarrow (8, 1), (8, 2), (8, 3), (8, 7) \\ & \rightarrow (4, 2), (4, 3), (4, 7), (4, 8) \\ & \rightarrow (9, 1), (9, 2), (9, 3), (9, 4) \\ & \rightarrow (10, 1), (10, 2), (10, 3), (10, 4) \\ & \rightarrow (5, 7), (5, 8), (5, 9), (5, 10) \\ & (3, 4) \rightarrow (11, 1), (11, 2), (11, 3), (11, 4), (11, 5) \\ & (7, 8) \rightarrow (6, 7), (6, 8), (6, 9), (6, 10), (6, 11) \\ & (1, 3), (2, 4) \rightarrow (12, 1), (12, 2), (12, 3), (12, 4), (12, 5), (12, 6) \end{aligned}$$

El resultado de esta construcción es  $K_{6,6}$  más dos aristas,  $(1, 2)$  y  $(2, 3)$ . Como la 2-extensión en X conserva la independencia en la matroide de cofactores,  $K_{6,6}$  es independiente.

En  $s > 3$ , la demostración se puede hacer por inducción: si  $K_{s+2,s+2}$  es libre en dimensión  $s$ , añadiendo un vértice unido a todos los demás queda un grafo libre en dimensión  $s + 1$ , y al hacer una división de vértice queda  $K_{s+3,s+3}$  más  $s$  aristas. Como este grafo es libre,  $K_{s+3,s+3}$  también lo debe ser.

Voy a demostrar a continuación la relación entre un caso particular de rigidez de cofactores (no genérica) y otro de rigidez clásica. Este caso reaparecerá más adelante.

**Lema 1.3.10.** [3] *Para cada  $i = 1, \dots, n$ , sea  $P^i = (p_1^i, \dots, p_d^i)$  una base del espacio de polinomios de grado  $d$  en una variable y  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  fijos. Sea  $M$  la matriz de tamaño  $\binom{n}{2} \times dn$  obtenida como si fuera una matriz de rigidez, pero poniendo en la fila de la arista  $ij$  el vector  $P^i(t_j)$  en la parte de  $i$  y  $-P^j(t_i)$  en la parte de  $j$ . Entonces, la matroide de filas de  $M$  no depende de las bases  $P^i$  elegidas.*

*Demostración.* Dadas dos bases cualesquiera, la matriz  $M$  correspondiente a una de ellas se puede obtener a partir de la otra multiplicando por la derecha por la matriz cuadrada de tamaño  $nd$  diagonal por bloques con la matriz de cambio de base en cada bloque.  $\square$

**Teorema 1.3.11.** [3] Sean  $t_1 < \dots < t_n$  números reales. Entonces, las dos matroides de rigidez siguientes son iguales:

- la de rigidez clásica en dimensión  $d$  con puntos  $p_1, \dots, p_n$  dados por esos parámetros en la curva de momentos  $\{(t, t^2, \dots, t^d) : t \in \mathbb{R}\}$ .
- la de rigidez de cofactores  $C_{d-1}^{d-2}$  con puntos en la parábola  $(t, t^2)$ , con esos mismos parámetros.

*Demostración.* La matriz de rigidez clásica en la curva de momentos, dividiendo cada fila por  $t_i - t_j$ , se escribe de la forma indicada en el lema, con  $P_k^i = (t^k - t_i^k)/(t - t_i)$ . Por su parte, la matriz de rigidez de cofactores en una parábola, dividiendo cada fila por  $(t_i - t_j)^{d-1}$ , queda también de esa forma, con

$$P_k^i = \frac{(t_i^2 - t^2)^{k-1}}{(t_i - t)^{k-1}} = (t + t_i)^{k-1}$$

Por lo tanto, sus matroides de filas coinciden. □

### 1.3.3. $C_2^1$ es la matroide maximal de rigidez en dimensión 3

En esta sección demostraremos el siguiente teorema reciente de [4].

**Teorema 1.3.12.** Para  $s = 2$ , la matroide de rigidez de cofactores genérica es maximal, es decir, cualquier conjunto que sea libre en una matroide de 3-rigidez cualquiera es libre en esta matroide.

Para demostrar esto, necesito una clasificación de los vértices de grado 5.

**Lema 1.3.13.** Sea  $U$  un conjunto de 5 vértices en un grafo libre  $H = (V, E)$ ,  $K = K(U)$  y  $\langle \rangle$  la clausura en la matroide genérica de cofactores en dimensión 3. Entonces, uno de los siguientes casos es cierto:

1.  $\langle E \rangle \cap K$  contiene un  $K_4$ .
2.  $\langle E + e \rangle$  contiene a  $K$ , para algún  $e \in K$ .
3. hay dos aristas  $e_1$  y  $e_2$  en  $K$  sin vértices en común, tales que  $H + e_1 + e_2$  es libre.
4. hay dos aristas  $e_1$  y  $e_2$  en  $K$  con un vértice común tales que  $H + e_1 + e_2$  es libre, y las otras dos aristas de este vértice en  $K$  están en  $\langle E \rangle$ .
5.  $\langle E \rangle \cap K$  consiste en un vértice adyacente a otros cuatro y  $\langle E + e \rangle \cap K$  no contiene un  $K_4$  para ningún  $e \in K$ .

Esta clasificación se demuestra en [4] y se usa para demostrar que la extensión en doble  $V$  conserva la independencia.

*Demostración.* Supongo que los cinco vértices son 1, 2, 3, 4 y 5. Veamos primero que, si  $\langle E + e \rangle \cap K$  contiene un  $K_4$  para algún  $e \in K$ , se da alguno de los cuatro primeros casos.

Supongamos que  $e = (1, 2)$ . Si  $e \in \langle E \rangle$ , se da el caso 1. Si  $(3, 4)$ ,  $(3, 5)$  o  $(4, 5)$  no está en  $\langle E + e \rangle$ , se da el caso 3. Si  $e \notin \langle E \rangle$  y las tres aristas están en  $\langle E + e \rangle$ , considero dos casos:



- El  $K_4$  del que estamos hablando contiene  $(1, 2)$ . Podemos suponer que los vértices son 1, 2, 3 y 4. Si  $(1, 5)$  o  $(2, 5)$  está en  $\langle E + e \rangle$ ,  $\langle E + e \rangle \cap K$  es rígido y se da el caso 2. Si no está ninguna de las dos y  $(2, 3)$  y  $(2, 4)$  están en  $\langle E \rangle$ , se da el caso 4. Si alguna de las dos no está, supongamos que sea  $(2, 3)$ . Entonces  $(2, 3) \in \langle E + e \rangle \setminus \langle E \rangle$ , luego  $E + (2, 3)$  es libre y  $\langle E + e \rangle = \langle E + (2, 3) \rangle$ . Esto no contiene a  $(1, 5)$ , luego  $E + (2, 3) + (1, 5)$  es libre y se da el caso 3.
- El  $K_4$  no contiene a  $(1, 2)$ , por ejemplo es en 1, 3, 4 y 5. Si en  $\langle E + e \rangle$  hay dos aristas de entre  $(2, 3)$ ,  $(2, 4)$  y  $(2, 5)$ , la tercera también está y estamos en el caso 2. Si no, podemos suponer que  $(2, 4)$  y  $(2, 5)$  no están.
  - Si  $(1, 3)$  no está en  $\langle E \rangle$ ,  $\langle E + e \rangle = \langle E + (1, 3) \rangle$ , que no contiene a  $(2, 4)$ , y estamos en el caso 3. Si  $(1, 4)$  no está en  $\langle E \rangle$ , lo mismo con  $(2, 5)$ . Si es  $(1, 5)$ , lo mismo con  $(2, 4)$ , si es  $(3, 4)$  con  $(2, 5)$  y si es  $(3, 5)$  con  $(2, 4)$ .
  - Si están todas las aristas entre 1, 3, 4 y 5 en  $\langle E \rangle$ , se da el caso 1.
  - Si están todas las aristas menos  $(4, 5)$ ,  $\langle E + e \rangle = \langle E + (4, 5) \rangle$ , que no contiene a  $(2, 4)$ , y  $(1, 4)$  y  $(3, 4)$  están en  $\langle E \rangle$ , luego se da el caso 4.

Supongamos ahora que  $\langle E + e \rangle \cap K$  no contiene un  $K_4$ , para ningún  $e$ . Entonces ya se cumple una parte del caso 5 y falta ver que, o se cumple la otra parte, o estamos en uno de los otros casos.

**Lema 1.3.14.** *En esta situación, si  $E + (1, 2)$  es libre y  $|\langle E \rangle \cap \{(3, 4), (3, 5), (4, 5)\}| \leq 1$ , se cumple el caso 3.*

*Demostración.* Si alguna de las aristas  $(3, 4)$ ,  $(3, 5)$ ,  $(4, 5)$  no está en  $\langle E + (1, 2) \rangle$ , ya lo tenemos. Si están las tres, para no formar el grafo completo en 1, 2, 3 y 4, podemos suponer que  $(1, 3)$  no está.

Si  $(4, 5) \notin \langle E \rangle$ ,  $\langle E + (1, 2) \rangle = \langle E + (4, 5) \rangle$ , y como  $(1, 3)$  no está  $E + (4, 5) + (1, 3)$  es libre y se da el caso 3.

Si  $(4, 5) \in \langle E \rangle$ , por hipótesis es la única del triángulo 345, y  $(3, 4)$ ,  $(3, 5) \notin \langle E \rangle$ . Por lo tanto  $\langle E + (1, 2) \rangle = \langle E + (3, 4) \rangle = \langle E + (3, 5) \rangle$ . Una arista entre  $(1, 4)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(1, 5)$  o  $(2, 5)$  no puede estar en ese conjunto, ya que si estuvieran las cuatro se formaría un  $K_4$  en 1, 2, 4 y 5. Sea la que sea, se cumple el caso 3.  $\square$

Supongamos ahora que uno de los cinco vértices no está en  $\langle E \rangle \cap K$ , por ejemplo el 5. Si los otros cuatro forman un grafo completo, se da el caso 1. Si no, podemos suponer que  $(1, 2)$  no está. Entonces  $E + (1, 2)$  es libre y  $(3, 5)$  y  $(4, 5)$  tampoco están, así que estamos en las condiciones del lema y se da el caso 3.

Queda el caso en el que  $\langle E \rangle \cap K$  abarca todos los vértices.

**Lema 1.3.15.** *Si hay un vértice de grado 1 en  $\langle E \rangle \cap K$  y su vecino tiene grado menor que 4, se da el caso 3.*

*Demostración.* Supongo que el vértice 5 solo es adyacente al 1 y que alguna otra arista del 1, pongamos la  $(1, 2)$ , no está en  $\langle E \rangle$ . Entonces,  $E + (1, 2)$  es libre, y  $(3, 5)$  y  $(4, 5)$  no están en  $\langle E \rangle$ , luego estamos en las condiciones del lema 1.3.14.  $\square$

Si  $\langle E \rangle \cap K$  no tiene ciclos, debe haber algún vértice de grado 1, luego su vecino tiene grado 4. Los otros cuatro vértices no pueden estar conectados entre sí porque formarían ciclos, y estamos en el caso 5.

Supongamos entonces que existe un ciclo de longitud 5. Sea  $e_1$  una cuerda del ciclo. Por hipótesis,  $\langle E + e_1 \rangle$  no contiene un  $K_4$ , luego debe haber otra cuerda  $e_2$  tal que  $E + e_1 + e_2$  es libre. Si  $e_1$  y  $e_2$  no tienen vértices en común, se da el caso 3, y si tienen un vértice en común, las otras dos aristas están en el ciclo y se da el caso 4.

Si hay un ciclo de longitud 4, por ejemplo  $(1, 2, 3, 4)$ ,  $\langle E + (1, 3) \rangle$  no contiene a  $(2, 4)$  y estamos en el caso 3.

Supondré entonces que no hay ciclos de longitud 4 o 5, por lo tanto debe haber un triángulo, por ejemplo  $(1, 2, 3)$ . Del vértice 4 o 5 no pueden salir dos aristas al triángulo, porque formarían un 4-ciclo. Si no hay una arista entre ellos, los dos tienen grado 1 y por el lema 1.3.15 su vecino tiene grado 4, así que debe ser el mismo. Si hay una arista, también deben ir al mismo para no formar un 4-ciclo. Supongo entonces que los vértices 4 y 5 están conectados al 1 (y quizá entre ellos).

Entonces,  $E + (2, 4)$  es libre. Si  $E + (2, 4) + (3, 5)$  es libre, estamos en el caso 3. Si no,  $(3, 5) \in \langle E + (2, 4) \rangle$ . Para que esta clausura no contenga un  $K_4$ , no puede contener a  $(2, 5)$ , por lo que  $E + (2, 4) + (2, 5)$  es libre, y como  $(2, 1)$  y  $(2, 3)$  están en  $E$ , se da el caso 4.  $\square$

*Demostración de 1.3.12.* La clave está en demostrar que las cinco operaciones del teorema anterior forman un conjunto de extensiones análogo al de Henneberg, es decir, dado un grafo isostático en una matroide de 3-rigidez, siempre se obtiene por una secuencia de grafos en la que el grafo inicial es un triángulo y cada grafo puede ser:

- una 0 o 1-extensión, 2-extensión en  $X$  o división de vértice del grafo anterior
- una 2-extensión en doble  $V$  del grafo anterior y de otro grafo de la secuencia

Entonces, en esa secuencia todos los grafos son isostáticos en la matroide genérica de cofactores, que es lo que queremos demostrar.

Así pues, supongamos que lo tenemos resuelto para grafos con un número  $n$  de vértices, tomemos un grafo  $(V, E)$  con  $n + 1$  vértices, libre en cierta matroide  $M$  de 3-rigidez, y veamos que siempre es posible deshacer una de las cinco operaciones para obtener un grafo libre con un vértice menos (quizá dos grafos libres).

Si el grafo tiene un vértice de grado 3 o 4, por el teorema 1.1.11 podemos deshacer una 0 o 1-extensión de ese vértice, obteniendo otro grafo libre.

Si el menor grado que sale es 5, por el teorema 1.1.7 debe haber algún vértice  $v$  de grado 5. Sea  $H$  el grafo obtenido quitando este vértice y  $U$  el conjunto de sus vecinos. Si  $H$  está en el caso 3 o 4 de 1.3.13, podemos hacer una extensión en  $X$  o una división de vértice, respectivamente, y obtener  $G$ , de modo que es libre.

Veamos que los casos 1 y 2 nunca se dan. Si  $H$  estuviera en el caso 1, las aristas implicadas de  $K$  (que por hipótesis inductiva son también implicadas en  $M$ ) más el vértice  $v$  forman un  $K_5$ , que es un circuito en cualquier matroide de 3-rigidez, y por estar estas aristas implicadas,  $G$  sería dependiente. Supongamos que estamos en el caso 2 y  $\langle H + e \rangle$  contiene todo  $K$ .

Si  $H + e$  es independiente en  $M$ , por hipótesis inductiva  $\langle H + e \rangle_M$  contiene a  $K$ . Entonces  $r_M(G) - r_M(H + e) = r_M(G) - r_M(H \cup K) \leq 3$  (por ser  $K_5$  un circuito). Pero esa diferencia de rangos debe ser 4, de lo contrario  $G$  no sería libre, contradicción.

Si  $H + e$  es dependiente en  $M$ , como el caso 1 no se da, existe otra arista  $e' \in K$  tal que  $H + e'$  es libre. Por el mismo razonamiento de antes,  $K \not\subseteq \langle H + e' \rangle$ . Como  $H + e'$  es libre en  $M$  también es libre por cofactores, luego  $e' \notin \langle H \rangle$ , pero sí que está en  $\langle H + e \rangle$ .

Entonces  $\langle H + e \rangle = \langle H + e' \rangle$ , lo cual es una contradicción (porque un conjunto contiene a  $K$  y el otro no). Por lo tanto el caso 2 es imposible.

Supongamos ahora cierto el caso 5. Voy a suponer que el vértice  $v$  es el 0 y sus vecinos 1, 2, 3, 4 y 5. La clausura es un vértice, pongamos el 5, adyacente a 1, 2, 3 y 4. Entonces,  $H + (1, 2)$  y  $H + (3, 4)$  son independientes. Si  $H + (1, 2) + (3, 4)$  es libre, estamos en el caso 3. Si no,  $\langle H + (1, 2) \rangle = \langle H + (3, 4) \rangle$ . Como el caso 2 no se da, debe haber una arista, pongamos la  $(i, j)$ , tal que  $H + (1, 2) + (i, j)$  es libre y por lo tanto lo es  $H + (3, 4) + (i, j)$ . Sea cual sea esta arista, o estamos en el caso 3 o tenemos dos grafos desde los que se puede hacer una extensión en doble  $V$  para obtener  $G$ .  $\square$

**Corolario 1.3.16.** *La matroide de rigidez de cofactores en  $s = 2$  es más libre (quizá no estrictamente) que la clásica en  $d = 3$ .*

**Conjetura 1.3.17.** [2] *La matroide de rigidez genérica de cofactores en  $s = 2$  coincide con la clásica en  $d = 3$ .*

Para  $m \geq 4$ , J. Graver [5] conjeturó que la matroide de rigidez clásica era la maximal. Esta conjetura fue refutada por N. J. Thurston en 1991 [6] y después por W. Whiteley, al encontrar ejemplos de grafos que son libres en una matroide de cofactores y no en la clásica correspondiente, como  $K_{d+2, d+2}$ . No se conoce ningún grafo al que le pase lo contrario, lo que induce a pensar que, para cualquier dimensión, la matroide de cofactores es más libre que la clásica.

**Conjetura 1.3.18** (Conjetura maximal de Whiteley). *La matroide de rigidez de cofactores es la matroide de rigidez maximal en dimensión  $s + 1$ .*

### 1.3.4. El circuito formado por un $K_{d+2}$

Ya sabemos que, en cualquier matroide de rigidez en dimensión  $m$ ,  $K_{m+2}$  es un circuito (el grafo menos una arista se obtiene como una 0-extensión de  $K_{m+1}$ ). Ser circuito significa que existe una única autotensión (es decir, una única dependencia lineal entre las columnas de la matriz de rigidez). Podemos intentar calcular los coeficientes de esa autotensión, tanto para la rigidez clásica como la de cofactores.

**Teorema 1.3.19.** *Si  $p_1, \dots, p_{d+2}$  son puntos que generan afínmente  $\mathbb{R}^d$  y  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{d+2})$  son los coeficientes de la única dependencia afín entre los  $p$ , se tiene que  $\lambda_{ij} = \lambda_i \lambda_j$  son la dependencia en la matriz de rigidez clásica.*

*Demostración.* Para que las tensiones se cancelen en el vértice  $i$ , debo tener

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(p_i - p_j) = 0$$

Para  $i$  fijo, tengo que tomar  $\lambda_{ij}$  proporcional a  $\lambda_j$ . Pero este coeficiente no depende de la elección de  $i$ , solo de  $j$ , y se puede multiplicar por algo que no dependa de  $j$ . Tenemos entonces una solución, dada por  $\lambda_{ij} = \lambda_i \lambda_j$ .  $\square$

En el teorema anterior,  $\lambda_i$  se puede interpretar como el volumen del símplex formado por todos los vértices menos  $i$ , con el signo dependiendo de la orientación del símplex.

Para la rigidez de cofactores, comenzamos con el caso arbitrario de  $n$  puntos y suponemos que tenemos un grafo (es decir, un subconjunto de filas de  $C(p)$ ) que es un circuito en la

matroide de rigidez. Queremos encontrar unos  $\lambda_{ij}$  (para todo  $1 \leq i < j \leq n$ ) que cumplan lo siguiente para todo  $i = 1, \dots, n$ :

$$-\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{ji} \mathbf{m}_{ji} + \sum_{j=i+1}^n \lambda_{ij} \mathbf{m}_{ij}$$

Obsérvese que cuando hablamos de  $\mathbf{m}_{ij}$  siempre suponemos  $i < j$ . Si definimos  $\mathbf{m}_{ij} = -\mathbf{m}_{ji}$  para el caso  $i > j$ , pero manteniendo  $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ , la expresión anterior se simplifica a:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \mathbf{m}_{ij} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

donde

$$\mathbf{m}_{ij} = \begin{cases} (1, m_{ij}, \dots, m_{ij}^{s-1}), & \text{si } i < j \\ -(1, m_{ij}, \dots, m_{ij}^{s-1}), & \text{si } i > j \end{cases}$$

Es decir, la matriz de coeficientes del bloque  $i$  es una matriz de Vandermonde (con las filas correspondientes a las aristas  $(i, j)$  con  $j < i$  cambiadas de signo). Esto nos lleva al siguiente resultado:

**Lema 1.3.20.** *Si  $G(p)$  es un circuito de la rigidez de cofactores de grado  $s$  (o sea, de dimensión  $s + 1$ ), se tiene que:*

1. *Todo vértice que aparece en el circuito tiene grado al menos  $s + 2$ .*
2. *Si  $p_i$  tiene grado  $s + 2$ , los  $s + 2$  valores no nulos de  $\lambda_{ij}$  ( $j \neq i$ ) tienen signos alternados según los valores de  $j$ , excepto los dos adyacentes a  $i$ , que tienen el mismo signo.*

*Demostración.* El apartado (1) se cumple en cualquier matroide de rigidez de dimensión  $s + 1$ . Para el apartado (2), tenemos que la matriz de coeficientes de la ecuación que deben cumplir los  $\lambda_{ij}$  es una matriz de Vandermonde con las  $r$  primeras filas cambiadas de signo, donde  $r$  es el número de vecinos  $j$  de  $i$  con  $j < i$ .  $\lambda_{ij}$  es  $(-1)^{k-1}$  por el determinante de la matriz sin la fila  $k$  que corresponde al vértice  $j$ .

Si  $j < i$  ( $k \leq r$ ), en la matriz pasa a haber  $r - 1$  filas cambiadas de signo y el signo que sale es  $(-1)^{k+r-2} = (-1)^{k+r}$ . Si  $j > i$  ( $k > r$ ), en la matriz hay  $r$  filas cambiadas, y el signo es  $(-1)^{k+r-1}$ . Por lo tanto, los signos van alternando excepto cuando se pasa el vértice  $i$ .  $\square$

Para estudiar estos  $\lambda_{ij}$  vamos primero a ver qué ecuación relaciona las seis pendientes de cuatro puntos en el plano. Sea  $m_{i,jk} := m_{ij} - m_{ik}$ .

**Lema 1.3.21.**  $m_{i,jl}m_{j,kl}m_{k,il} = m_{i,kl}m_{k,jl}m_{j,il}$ .

Esta relación ya aparece en [7].

*Demostración.* Voy a partir del hecho de que el  $K_4$  formado por  $\{i, j, k, l\}$  es dependiente en 2 dimensiones, por lo que su matriz de rigidez tiene rango 5 y el siguiente determinante debe valer 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & m_{ij} & -1 & -m_{ij} & 0 & 0 \\ 1 & m_{ik} & 0 & 0 & -1 & -m_{ik} \\ 1 & m_{il} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m_{jk} & -1 & -m_{jk} \\ 0 & 0 & 1 & m_{jl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & m_{kl} \end{vmatrix} = 0$$

Elimino las filas 3, 5 y 6 haciendo ceros en las columnas 1, 3 y 5, respectivamente:

$$\begin{vmatrix} m_{i;jl} & m_{j;li} & 0 \\ m_{i;kl} & 0 & m_{k;li} \\ 0 & m_{j;kl} & m_{k;lj} \end{vmatrix} = 0$$

$$m_{i;jl}m_{j;kl}m_{k;li} + m_{i;kl}m_{j;li}m_{k;lj} = 0$$

Usando que  $m_{r;st} = -m_{r;ts}$

$$-m_{i;jl}m_{j;kl}m_{k;il} + m_{i;kl}m_{j;il}m_{k;jl} = 0$$

que es lo que queremos demostrar.  $\square$

Esto da pie a definir

$$m_{ijk;l} := m_{i;jl}m_{j;kl}m_{k;il} = (m_{ij} - m_{il})(m_{jk} - m_{jl})(m_{ki} - m_{il})$$

de tal manera que este valor no depende del orden de  $i, j$  y  $k$ . Como la dependencia asociada al circuito es única solo módulo multiplicación por una constante, en el siguiente teorema no damos una expresión para los  $\lambda_{ij}$  individuales sino para las razones entre ellos.

**Teorema 1.3.22.** *La dependencia en la matriz de rigidez de cofactores de  $s + 3$  puntos  $p_1, \dots, p_{s+3}$  en el plano satisface:*

$$\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ir}} = \text{sig}((i-j)(i-r)) \frac{\prod_{k \neq r,i} m_{i;rk}}{\prod_{k \neq i,j} m_{i;jk}}, \quad \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{rt}} = \text{sig}((i-j)(t-r)) \frac{\prod_{k \neq r,t} m_{r;tk}}{m_{r;ij}} \prod_{k \neq i,j,r} \frac{m_{i;rk}m_{j;rk}}{m_{ijr;k}}$$

donde  $i, j, r, t$  son distintos.

*Demostración.* Tenemos que coger  $\lambda_{ij}$  proporcional al determinante de la matriz de Vandermonde de las  $s + 1$  pendientes que unen  $i$  al resto de vértices menos a  $j$ , con signo  $(-1)^{i+j+1}$ . Este determinante es

$$\prod_{k > l \neq i,j} (m_{ik} - m_{il}) = \prod_{k > l \neq i,j} m_{i;kl}$$

Este producto parece depender de  $i$ , por lo que no nos sirve el truco de antes de tomar  $\lambda_{ij} = \lambda_i \lambda_j$ . Veamos cómo podemos arreglarlo.

Aplicando la proporcionalidad de la matriz de Vandermonde al bloque  $r$  queda

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{ri}}{\lambda_{rt}} &= (-1)^{i+t} \frac{\prod_{k > l \neq r,i} m_{r;kl}}{\prod_{k > l \neq r,t} m_{r;kl}} = (-1)^{i+t} \frac{\prod_{k > t, k \neq r} m_{r;kt} \prod_{l < t, l \neq r} m_{r;tl}}{\prod_{k > i, k \neq r} m_{r;ki} \prod_{l < i, l \neq r} m_{r;il}} \\ &= (-1)^{i+t} \frac{(-1)^{s+2-t} \text{sig}(r-t) \prod_{k \neq r,t} m_{r;tk}}{(-1)^{s+2-i} \text{sig}(r-i) \prod_{k \neq r,i} m_{r;ik}} = \text{sig}((r-i)(r-t)) \frac{\prod_{k \neq r,t} m_{r;tk}}{\prod_{k \neq r,i} m_{r;ik}} \end{aligned}$$

y análogamente

$$\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ir}} = \text{sig}((i-j)(i-r)) \frac{\prod_{k \neq r,i} m_{i;rk}}{\prod_{k \neq i,j} m_{i;jk}}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{rt}} &= \text{sig}((i-j)(t-r)) \prod_{k \neq r,t} m_{r;tk} \prod_{k \neq r,i} \frac{m_{i;rk}}{m_{r;ik}} \prod_{k \neq i,j} \frac{1}{m_{i;jk}} \\ &= \text{sig}((i-j)(t-r)) \frac{\prod_{k \neq r,t} m_{r;tk}}{m_{r;ij}} \prod_{k \neq i,j,r} \frac{m_{i;rk}}{m_{r;ik}m_{i;jk}} \end{aligned}$$

que es equivalente a la expresión que buscamos.  $\square$

La segunda expresión del teorema es claramente simétrica en  $i$  y  $j$ , aunque no lo parece, también en  $r$  y  $t$ . En efecto:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{rt}} \left( \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{tr}} \right)^{-1} &= - \prod_{k \neq r, t} \frac{m_{r;tk}}{m_{t;rk}} \prod_{k \neq r, i} \frac{m_{i;rk}}{m_{r;ik}} \prod_{k \neq t, i} \frac{m_{t;ik}}{m_{i;tk}} \\ &= - \frac{m_{r;ti} m_{i;rt} m_{t;ir}}{m_{t;ri} m_{r;it} m_{i;tr}} \prod_{k \neq r, t, i} \frac{m_{r;tk} m_{i;rk} m_{t;ik}}{m_{t;rk} m_{r;ik} m_{i;tk}} = 1 \end{aligned}$$

## 2 Multitriangulaciones

### 2.1. Geometría y combinatoria de las multitriangulaciones

Los próximos resultados vienen de [8].

#### 2.1.1. Introducción

La idea de multitriangulaciones es una generalización de la de triangulaciones. Una *triangulación* de un polígono es un conjunto de aristas tales que cualesquiera dos no se cruzan. Si permitimos algunos cruces, pero no más de un cierto número de aristas, obtenemos una multitriangulación (ver figura 2.1).

**Definición 2.1.1.** Un *k-cruce* es un conjunto de  $k$  diagonales entre los vértices de un polígono convexo que se cruzan dos a dos. Un conjunto de diagonales entre los vértices de un polígono convexo es  $(k+1)$ -*libre* si no contiene un  $(k+1)$ -cruce. Una *k-triangulación* es un conjunto  $(k+1)$ -libre maximal.

Tomemos un  $n$ -gono convexo. Voy a numerar los vértices de 0 a  $n-1$  y diré que  $u \prec v \prec w$  si  $u, v$  y  $w$  están en ese orden al recorrer el círculo, es decir,  $u < v < w$ ,  $v < w < u$  o  $w < u < v$ .

Si una arista une dos vértices a distancia menor o igual que  $k$ , se podrá añadir a cualquier multitriangulación, ya que no ocasiona ningún  $k$ -cruce. En adelante llamaré *aristas irrelevantes* a las de longitud menor que  $k$ , *aristas de borde* a las de longitud  $k$  y *aristas relevantes* a las de longitud mayor que  $k$ .

**Definición 2.1.2.** Un *ángulo* en un conjunto de aristas  $E$  es una terna  $(u, v, w)$  tal que  $u \prec v \prec w$  y, para todo  $t$  con  $w \prec t \prec u$ ,  $(v, t) \notin E$ . Un ángulo es *relevante* si sus lados son aristas relevantes. Una *bisectriz* de  $(u, v, w)$  es cualquier arista  $(v, v')$  con  $u \prec v' \prec w$ .

#### 2.1.2. Estrellas

**Definición 2.1.3.** Una *k-estrella* (ver figura 2.2) es un conjunto de aristas en el  $n$ -gono  $\{(s_i, s_{i+k}) : 0 \leq i \leq 2k\}$  tales que  $s_0 \leq \dots \leq s_{2k}$  y  $s_i = s_{i+2k+1}$ .

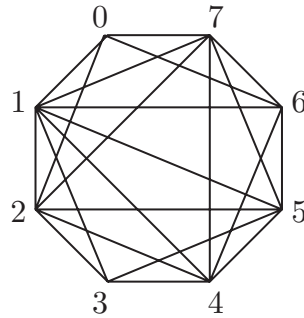


Figura 2.1: Una 2-triangulación en 8 vértices. Podemos ver que se cruzan varios pares de aristas, pero no hay tres que se crucen dos a dos.

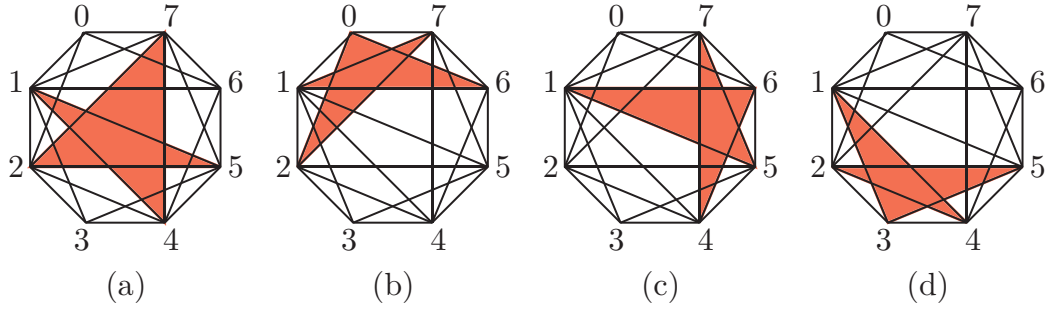


Figura 2.2: Cuatro 2-estrellas contenidas en la 2-triangulación de la figura 2.1

**Lema 2.1.4.** *Dada una  $k$ -estrella  $S$  contenida en un conjunto  $k + 1$ -libre  $E$ , cualquier ángulo de  $S$  es un ángulo de  $E$  y es relevante.*

*Demostración.* Sea  $\{s_0, \dots, s_{2k}\}$  el conjunto de vértices de la estrella, donde  $s_{i+1}$  es el vecino de  $s_i$  (o sea, no están en orden circular). Si hubiera una arista de  $E$  contenida en un ángulo, pongamos  $s_j t$ , esta arista formaría un cruce de  $k + 1$  aristas:

$$(s_{j+1}, s_{j+2}), (s_{j+3}, s_{j+4}), \dots, (s_{j-2}, s_{j-1}), (s_j, t)$$

Por lo tanto, no hay tal arista, y el ángulo debe ser relevante porque a cada lado hay  $k - 1$  vértices.  $\square$

Los siguientes resultados tienen lugar en un conjunto  $(k + 1)$ -libre.

**Corolario 2.1.5.** *Si se conoce un ángulo de una estrella en un conjunto libre, se puede recuperar toda la estrella.*

*Demostración.* Si el ángulo dado es  $(u, v, w)$ , se toma el único ángulo  $(v, w, x)$  en el conjunto, luego el único ángulo  $(w, x, y)$ , y así sucesivamente.  $\square$

**Corolario 2.1.6.** *Dada una arista  $f$  y una estrella  $S$ , el número de vértices de  $S$  a ambos lados de  $f$  es distinto.*

*Demostración.* Si hubiera el mismo número, uno y solo uno de los extremos de  $f$  sería un vértice de la estrella, y el otro extremo estaría contenido en ese ángulo, lo que contradice el lema 2.1.4.  $\square$

Si hay más vértices de  $S$  entre  $v$  y  $u$  que entre  $u$  y  $v$ , decimos que  $S$  está en el *lado positivo* de la arista  $(u, v)$ ; si no, está en el *lado negativo*. Una estrella está *contenida* en un ángulo  $(u, v, w)$  si está en el lado positivo de  $(u, v)$  y  $(v, w)$ .

**Lema 2.1.7.** *Si  $(u, v, w)$  contiene la estrella  $S$ , o bien  $v$  es un vértice de  $S$  y el ángulo está en la estrella, o bien  $v$  no está en  $S$  y el ángulo tiene una bisectriz común con un ángulo de  $S$ .*

*Demostración.* Si  $v$  es un vértice de  $S$ , sea  $(x, v, y)$  el ángulo de  $S$  en ese vértice. Para que  $(u, v, w)$  contenga a  $S$ , debemos tener  $u \preceq x \prec y \preceq w$  y entonces  $x = u$  y  $y = w$ , como queríamos demostrar.

Si  $v$  no es un vértice de  $S$ , está contenido en un ángulo de  $S$ , pongamos  $(x, y, z)$ . Entonces, como  $S$  está en el lado positivo de la arista  $(u, v)$ ,  $y$  (que deja  $k$  vértices a cada lado) debe estar entre  $v$  y  $u$ . Como  $S$  también está en el lado positivo de  $(v, w)$ ,  $y$  debe



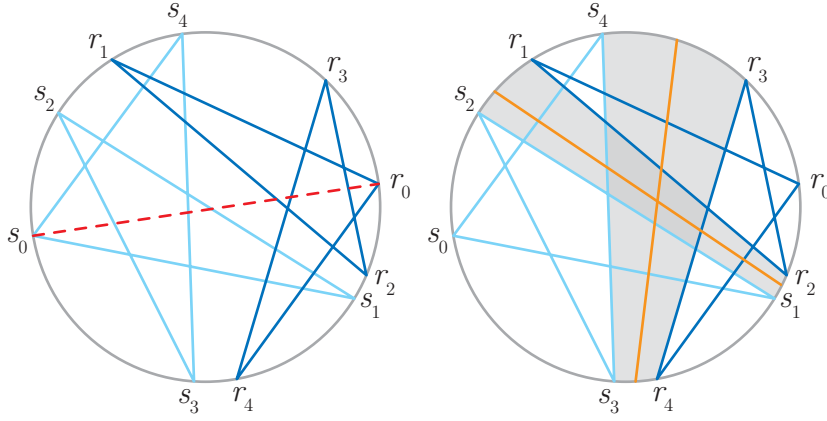


Figura 2.3: Una bisectriz común a dos estrellas y un 2-cruce que la corta. Observamos que está situado entre las estrellas.

estar entre  $u$  y  $w$ , luego está entre  $v$  y  $w$  (no puede ser  $v$  ni  $w$ , porque entonces el ángulo  $(x, y, z)$  tendría una bisectriz en  $E$ , contradiciendo el lema 2.1.4) y los ángulos tienen una bisectriz común.  $\square$

**Teorema 2.1.8.** *Si la unión de dos estrellas no tiene  $(k + 1)$ -cruces, las estrellas tienen una única bisectriz común (ver figura 2.3).*

*Demostración.* Sean  $R$  y  $S$  las dos estrellas,  $\{r_j : 0 \leq j \leq 2k\}$  los vértices de  $R$  en el orden en que se recorren y  $\{s_j : 0 \leq j \leq 2k\}$  los de  $S$ . Si  $S$  queda en el lado negativo de una arista de  $R$ , pongamos  $(r_{j-1}, r_j)$ , debe quedar en el lado positivo de la siguiente,  $(r_j, r_{j+1})$ . Como el número de lados es impar, debe haber dos aristas consecutivas que dejan a  $S$  en el lado positivo, y entonces el ángulo  $(r_{j-1}, r_j, r_{j+1})$  contiene a  $S$ , y por el lema anterior, las dos estrellas tienen una bisectriz común.

Supongamos que haya dos bisectrices comunes,  $e$  y  $f$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $e = (r_0, s_0)$ , y  $f = (r_a, s_b)$ .  $a$  y  $b$  no son 0, y podemos suponer también que  $a$  es par, de modo que  $b$  debe ser par, y  $f = (r_{2\alpha}, s_{2\beta})$  con  $1 \leq \beta \leq \alpha \leq k$ . Pero entonces el conjunto

$$\{(r_{2i}, r_{2i+1}) : 0 \leq i \leq \alpha - 1\} \cup \{(s_{2j}, s_{2j+1}) : \beta \leq j \leq k\}$$

forma un  $(k + 1 + \alpha - \beta)$ -cruce, que por lo menos es  $k + 1$ .  $\square$

El siguiente teorema es la clave para entender por qué las estrellas son la forma natural de ver una multitriangulación, de la misma forma que los triángulos son la forma natural de ver una triangulación.

**Teorema 2.1.9.** *En una multitriangulación, cada ángulo relevante está contenido en una única estrella.*

**Corolario 2.1.10.** *Cada arista relevante de una multitriangulación  $T$  está en dos estrellas de  $T$  (una en cada lado), cada arista de borde en una sola (por el lado de dentro) y las irrelevantes en ninguna.*

**Corolario 2.1.11.** *Dada una estrella  $S$  en  $T$ , para cada vértice  $r \notin S$  hay una única estrella de  $T$  cuya bisectriz común con  $S$  pasa por  $r$ . Es decir, hay una biyección entre  $\{\text{vértices que no se usan en } S\}$  y  $\{\text{estrellas de } T \text{ distintas de } S\}$ .*

*Demostración.* Sea  $(u, s, v)$  el ángulo de  $S$  que contiene a  $r$  y  $(x, r, y)$  el ángulo de  $T$  que contiene a  $s$ . Aplicando a este ángulo el teorema 2.1.9, tenemos que hay una estrella que lo tiene como ángulo, y esta estrella y  $S$  tienen  $(r, s)$  como bisectriz común.  $\square$

**Corolario 2.1.12.** *Cualquier arista relevante que no está en  $T$  es la bisectriz común de un par de estrellas. Es decir, hay una biyección entre  $\{\text{aristas relevantes que no se usan en } T\}$  y  $\{\text{pares de estrellas de } T\}$ .*

*Demostración.* Sea  $(r, s)$  una arista relevante que no está en  $T$ . Sean  $(x, r, y)$  y  $(u, s, v)$  los únicos ángulos de vértice  $r$  y  $s$  que contienen a  $s$  y  $r$ , respectivamente. Por el teorema 2.1.9, hay una única estrella  $R$  que contiene a  $(x, r, y)$ , y una única estrella  $S$  que contiene a  $(u, s, v)$ . Entonces  $(r, s)$  es la bisectriz común de  $R$  y  $S$ .  $\square$

Estas biyecciones permiten contar las aristas y estrellas de una multitriangulación. Dada una estrella  $S$ , hay tantas estrellas distintas de  $S$  en  $T$  como vértices de  $T$  no usados en  $S$ , es decir,  $n - 2k - 1$ , lo que da un total de  $n - 2k$  estrellas. Para las aristas, las que faltan son tantas como pares de estrellas de  $T$ , es decir, el número de aristas es

$$\binom{n}{2} - \binom{n - 2k}{2} = \frac{n(n - 1) - (n - 2k)(n - 2k - 1)}{2} = k(2n - 2k - 1)$$

También se pueden contar las aristas por doble conteo: las  $n - 2k$  estrellas tienen  $(n - 2k)(2k + 1) = (n - 2k)2k + n - 2k = 2k(n - 2k - 1) + n$  lados. Descontando  $n$  aristas de borde quedan  $2k(n - 2k - 1)$ , que son las aristas relevantes contadas dos veces, luego hay  $k(n - 2k - 1)$  relevantes, y  $k(2n - 2k - 1)$  aristas en total.

Voy a demostrar a continuación una relación entre las estrellas y las aristas de longitud  $k + 1$ . Esta relación generaliza un resultado conocido en triangulaciones, según el cual el número de aristas de longitud 2 es 2 más que el de triángulos internos.

**Definición 2.1.13.** Una *oreja* es una arista de longitud  $k + 1$ . Una oreja de una estrella  $S$  se dice *positiva* si  $S$  queda en su lado exterior (y es la única estrella a ese lado).

Una estrella es *interna* si no contiene aristas de borde.

**Lema 2.1.14.** *En una estrella  $S$ , las aristas de borde y las orejas positivas forman un camino alternado que empieza y termina con una arista de borde.*

*Demostración.* Sean  $(x, x + k), (y, y + k)$  dos aristas de borde de  $S$ . Todos los vértices entre  $x$  y  $x + k$ , y entre  $y$  y  $y + k$ , deben estar en  $S$ . Por lo tanto, las dos aristas se cruzan. Supongamos que  $x \prec y \prec y + k$ . Pero entonces todas las aristas de borde  $(i, i + k)$ , con  $x \preceq i \preceq y$ , están en  $S$ , y las aristas  $(i, i + k + 1)$ , con  $x \preceq i \preceq y - 1$ , son orejas positivas de  $S$ . Estas orejas y aristas de borde forman el camino alternante que buscamos.  $\square$

**Corolario 2.1.15.** *El número de orejas en una  $k$ -triangulación es  $2k$  más que el número de estrellas internas.*

*Demostración.* Para  $0 \leq i \leq 2k + 1$ , sea  $\mu_i$  el número de estrellas con  $i$  aristas de borde. Por el lema anterior, cada estrella con  $i$  aristas de borde aporta  $i - 1$  orejas, luego el número de orejas es

$$\sum_{i=1}^{2k+1} (i - 1)\mu_i = \sum_{i=1}^{2k+1} i\mu_i - \sum_{i=1}^{2k+1} \mu_i = n - (n - 2k - \mu_0) = 2k + \mu_0 \quad \square$$

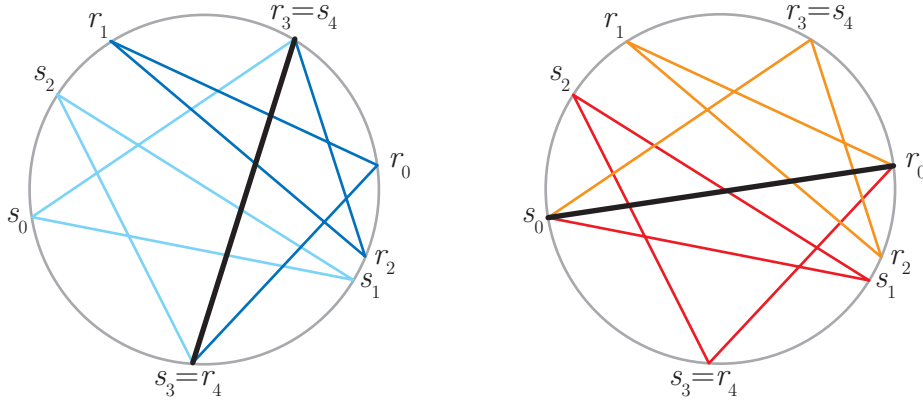


Figura 2.4: Un flip. Se está cambiando una arista que comparten dos estrellas por su bisectriz común.

### 2.1.3. Flips

**Definición 2.1.16.** Dadas dos estrellas  $R$  y  $S$  en un conjunto libre de aristas  $E$  con una arista común  $f$ , y con bisectriz común  $e$ , el flip de la arista  $f$  en  $E$  es el conjunto  $E \triangle \{e, f\}$ , es decir, el resultado de cambiar la arista  $f$  por la bisectriz común (ver figura 2.4).

Vamos a ver que todo flip de un conjunto libre también es libre. Para ello, uso dos lemas previos.

**Lema 2.1.17.** Sean  $R$  y  $S$  dos estrellas en un conjunto libre,  $\{r_0, \dots, r_{2k}, r_0\}$  los vértices de  $R$  en el orden de la estrella, y  $\{s_0, \dots, s_{2k}, s_0\}$  los de  $S$ , numerados de tal manera que  $(r_0, s_0)$  es la bisectriz común. Entonces, para cada  $i$  con  $1 \leq i \leq k$ ,  $r_0 \prec r_{2i-1} \preceq s_{2i}$ .

*Demostración.* Supongamos que no sea así, y que haya un  $i$  para el que eso no se cumpla. Podemos suponer que es el mayor  $i$  para el que no se cumple, y que sí es cierto para  $i+1$ . Por lo tanto,  $s_{2i} \prec r_{2i-1} \prec s_0 \prec s_{2i+1} \prec r_{2i+2}$  y

$$\begin{aligned} r_0 \prec s_{2k} \prec s_{2k-2} \prec \dots \prec s_{2i} \prec r_{2i-1} \prec r_{2i-3} \prec \dots \prec r_1 \prec s_0 \\ \prec s_{2k-1} \prec s_{2k-3} \prec \dots \prec s_{2i+1} \prec r_{2i+2} \prec r_{2i} \prec \dots \prec r_0 \end{aligned}$$

Pero entonces las aristas  $(r_0, r_1), \dots, (r_{2i-2}, r_{2i-1}), (s_{2i}, s_{2i+1}), \dots, (s_{2k}, s_0)$  forman un  $(k+1)$ -cruce, contradicción.  $\square$

**Lema 2.1.18.** Con las notaciones del lema anterior, sea  $F$  un  $k$ -cruce tal que todas sus aristas cruzan la arista  $(r_0, s_0)$ . Pongo  $F = \{f_1, \dots, f_k\}$ ,  $f_i = (x_i, y_i)$ , por el orden en que están en el círculo, es decir

$$r_0 \prec x_1 \prec \dots \prec x_k \prec s_0 \prec y_1 \prec \dots \prec y_k \prec r_0$$

Entonces, para todo  $i$ ,  $r_{2k-2i+1} \preceq x_i \preceq s_{2k-2i+2}$  y, análogamente,  $s_{2k-2i+1} \preceq y_i \preceq r_{2k-2i+2}$ .

Esta colocación de las aristas es la que se ve en la figura 2.3.

*Demostración.* Supongamos que existe un  $l$  tal que  $r_0 \prec x_l \prec r_{2k-2l+1}$ . Tomo el  $l$  que sea máximo. Si  $l = k$ ,  $\{f_1, \dots, f_k, (r_0, r_1)\}$  es un  $(k+1)$ -cruce, luego  $l < k$ .

Por otra parte, si  $r_0 \prec y_l \prec r_{2k-2l}$ ,

$$\{f_1, \dots, f_l, (r_{2k-2l+1}, r_{2k-2l}), \dots, (r_1, r_0)\}$$

es un  $(k+1)$ -cruce, luego  $r_{2k-2l} \preceq y_l \prec y_0$ . Pero entonces  $r_{2k-2l} \prec y_{l+1} \prec y_0$ , y por ser  $l$  máximo,  $r_{2k-2l+1} \prec r_{2k-2l-1} \prec x_{l+1} \prec r_0$ , de forma que

$$\{(r_0, r_{2k}), \dots, (r_{2k-2l+2}, r_{2k-2l+1}), f_{l+1}, \dots, f_k\}$$

es un  $(k+1)$ -cruce. La otra cota se demuestra de forma análoga (solo que simétrica).  $\square$

**Teorema 2.1.19.** *Si  $E$  es  $(k+1)$ -libre, su flip  $E\Delta\{e, f\}$  es  $k+1$ -libre. La arista  $f$  es de la forma  $(r_{2i-1}, r_{2i}) = (s_{2i-1}, s_{2i})$  para algún  $i$ , y las dos estrellas  $R$  y  $S$  se pueden reagrupar en otras dos estrellas  $X$  e  $Y$  en el conjunto resultante, cuya bisectriz común es  $f$  y que tienen la arista  $e$  en común.*

*Demostración.* Sea como antes  $e = (r_0, s_0)$  y  $f = (u, v)$ . Estas dos aristas no tienen vértices en común, así que podemos suponer  $r_0 \prec u \prec s_0 \prec v \prec r_0$ , de modo que  $u = r_{2i-1} = s_{2j}$  y  $v = r_{2i} = s_{2j-1}$ .

Supongamos que  $i \neq j$ . Sin pérdida de generalidad, tomo  $i > j$ . Por el lema 2.1.17,  $r_0 \prec r_{2i-1} \preceq s_{2i}$ , luego  $r_{2i-1} \preceq s_{2i} \prec s_{2j} = r_{2i-1}$ , contradicción. Debe ser, por lo tanto,  $i = j$ , y  $f = (r_{2i-1}, r_{2i}) = (s_{2i-1}, s_{2i})$ , como queríamos demostrar.

Supongamos ahora que  $E\Delta\{e, f\}$  no es libre. Entonces la arista  $e$  forma un  $k+1$ -cruce con aristas de  $E$  distintas de  $f$ . Pero por el lema 2.1.18, este cruce debe incluir una arista  $(x, y)$  con  $r_{2i-1} \preceq x_i \preceq s_{2i}$  y  $s_{2i-1} \preceq y_i \preceq r_{2i}$ , que solo puede ser  $f$ , contradicción.

Con esto, las estrellas que buscamos son

$$s_0, s_1, \dots, s_{2i-1} = r_{2i}, r_{2i+1}, \dots, r_{2k}, r_0, s_0$$

y lo mismo cambiando  $r$  con  $s$ . Por construcción, entre dos vértices consecutivos de  $X$  hay  $k-1$  vértices de  $X$  y lo mismo para  $Y$ . Claramente  $e$  es arista común a las dos, y  $f$  es bisectriz común porque es la bisectriz de  $(r_{2i-2}, r_{2i-1}, s_{2i+1})$  y  $(s_{2i-2}, s_{2i-1}, r_{2i+1})$ .  $\square$

**Corolario 2.1.20.** *El flip de una arista en una multitriangulación da otra multitriangulación.*

*Demostración.* Por el teorema anterior es libre. Su maximalidad se puede deducir de que todos los conjuntos maximales tienen el mismo número de aristas, y también de que si hubiera otro conjunto libre que contuviera a  $T\Delta\{e, f\}$ , en él se podría deshacer el flip, volviendo a cambiar  $e$  por  $f$ , con lo que se obtiene un superconjunto estricto de  $T$ , lo que contradice la maximalidad de  $T$ .  $\square$

En una multitriangulación  $T$ , cualquier arista relevante está en dos estrellas (corolario 2.1.10), luego todas las aristas relevantes se pueden flipar. Con esto se obtiene otra multitriangulación que solo difiere de  $T$  en una arista. Veamos que, de hecho, flipar una arista es la única forma de cambiarla.

**Lema 2.1.21.** *Aparte de  $T$ , la única multitriangulación que contiene  $T \setminus f$  es  $T\Delta\{e, f\}$ .*

*Demostración.* Supongamos que hubiera otra arista  $e'$ , distinta de  $e$ , que se pudiera poner en lugar de  $f$ . Por el lema 2.1.12,  $e'$  es bisectriz común de dos estrellas  $R'$  y  $S'$ . Como  $f$  no es común a  $R'$  y  $S'$ , una de las dos no la contiene, pongamos  $R'$ . Entonces  $T\Delta\{e', f\}$  contiene a  $R' \cup e$ , que a su vez contiene un  $k+1$ -cruce, contradicción con que  $T\Delta\{e', f\}$  es una multitriangulación.  $\square$

Por supuesto, las aristas irrelevantes o las de borde no se pueden cambiar: si lo hiciéramos, siempre obtendríamos un  $(k+1)$ -cruce. En efecto, la arista que hemos quitado se podría volver a añadir, resultando en un número demasiado alto de aristas para ser libre, y si este conjunto no es libre, tampoco lo es quitando una arista irrelevante.

**Definición 2.1.22.** El grafo de flips  $G_{n,k}$  es el grafo cuyos vértices son las  $k$ -triangulaciones del  $n$ -gono y cuyas aristas son los flips entre ellas.

**Proposición 2.1.23.**  $G_{n,k}$  es regular de grado  $k(n - 2k - 1)$ .

*Demostración.* El grado de un vértice es el número de flips que se pueden hacer desde esa multitriangulación, que son tantos como las aristas relevantes, es decir,  $k(n - 2k - 1)$ .  $\square$

Una arista de este grafo, es decir, un flip, que cambia la arista  $(a, b)$  por  $(c, d)$ , donde supongo  $a < b$  y  $c < d$ , puede estar en dos situaciones: que  $a < c < b < d$  o que  $c < a < d < b$ . En el primer caso, diré que el flip es *creciente*, en el segundo caso, que es *decreciente*.

Una multitriangulación especial es  $T_{n,k}^{\min}$ , que está formada por las aristas  $(i, j)$  con  $0 \leq i \leq k - 1$  y  $i + k + 1 \leq j \leq i - k - 1$ , además de todas las aristas de borde e irrelevantes. Esta multitriangulación es mínima en el sentido de que cualquier cambio de arista aumenta los índices de los extremos de la arista. Además, en cualquier otra multitriangulación se puede cambiar una arista para obtener una de estas.

**Teorema 2.1.24.** Dada una  $k$ -triangulación  $T$ , existe un flip decreciente que introduce una arista de  $T_{n,k}^{\min}$ .

*Demostración.* Tomo

$$l = \max\{k + 1 \geq i \geq n - k - 1 : \{(0, i), (1, i + 1), \dots, (k - 1, i + k - 1)\} \not\subseteq T\}$$

Sea  $j$  con  $0 \leq j \leq k - 1$  tal que  $(j, l + j)$  no está en  $T$ . Por ser  $T$  una multitriangulación, esto significa que existe un  $k$ -cruce que corta a esta arista. Llamo  $(x_i, y_i)$  a las aristas de este cruce, por orden circular, de tal forma que  $x_j \prec j \prec x_{j+1}$  y por lo tanto  $y_j \prec l + j \prec y_{j+1}$  (aquí llamo  $x_0 = y_k$  e  $y_0 = x_k$ ).

Entonces,  $k \leq x_k \leq l - 1$  y  $l + k \leq y_k \leq n - 1$ . Si  $y_k \neq l + k$ , se forma un  $(k + 1)$ -cruce con  $(0, l + 1), \dots, (k - 1, l + k), (x_k, y_k)$  (que están en  $T$  gracias a nuestra elección de  $l$ ). Por lo tanto,  $y_k = l + k$ .

Tenemos entonces que hay vértices entre  $k$  y  $l - 1$  que están conectados con  $l + k$ . Sea  $m$  el primero de esos vértices. Veamos que la arista que estamos buscando es  $f = (m, l + k)$ .

Sea  $S$  la estrella que contiene el ángulo  $(m, l + k, k - 1)$  y  $R$  la otra estrella que contiene a  $f$ . Llamo entonces a los vértices de  $S$ , por el orden circular,  $s_0, s_1, \dots, s_{k-1} = k - 1, s_k = m, \dots, s_{2k} = l + k$ . Tenemos entonces que  $l + k + 1 \leq s_0 \leq 0$ . Si  $s_0 \neq 0$ , la arista  $(s_0, m)$  forma un  $k + 1$ -cruce con  $(0, l + 1), \dots, (k - 1, l + k)$ , luego  $s_0 = 0$ , y  $s_i = i$  para  $0 \leq i \leq k - 1$ .

Sea  $e$  la bisectriz común a  $R$  y  $S$  y  $s_i$  su vértice en  $S$ .  $i$  no es  $k$  ni  $2k$ , que son los extremos de la arista común, ni ningún índice entre  $k + 1$  y  $2k - 1$ , porque entonces  $r$  tendría que estar entre  $s_{i-k-1}$  y  $s_{i-k}$ , lo que es imposible porque son vértices consecutivos. Por lo tanto,  $0 \leq i \leq k - 1$ , y  $s_i = i$  es algún vértice de los  $k$  primeros, de modo que  $e \in T_{n,k}^{\min}$ , como queríamos demostrar.  $\square$

De este teorema se deduce lo siguiente:

**Proposición 2.1.25.** Desde una triangulación  $T$  es posible hacer una secuencia de flips decrecientes (un camino en  $G_{n,k}$ ) que llega a la triangulación mínima. Por lo tanto,  $G_{n,k}$  es conexo, y su diámetro está acotado por el doble del número de aristas relevantes, es decir,  $2k(n - 2k - 1)$ .

Es posible construir un árbol binario dentro del grafo de flips, cuyos nodos son multitriangulaciones con las aristas pintadas de rojo o de azul, de la siguiente manera:

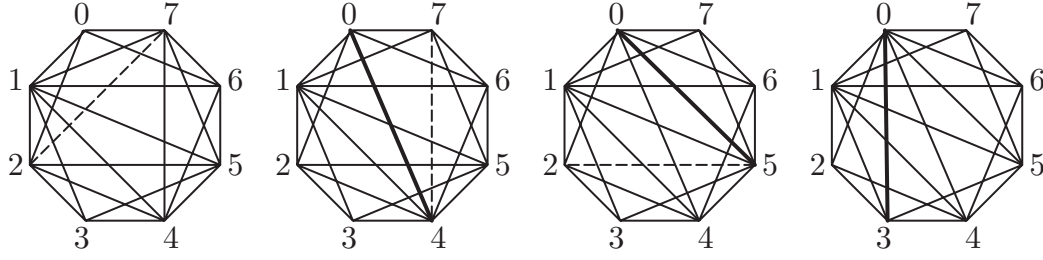


Figura 2.5: Un camino en el grafo de flips que va de la 2-triangulación de la figura 2.1 a  $T_{8,2}^{\min}$

- La raíz es  $T_{n,k}^{\min}$  con todas las aristas relevantes azules (y las irrelevantes rojas).
- Dado un nodo  $T$  cuya primera arista azul es  $e$ , un hijo de ese nodo es  $T$  pero con la arista  $e$  cambiada a rojo. Si el flip de  $e$  es creciente, otro hijo es el resultado del flip, donde la nueva arista es azul.
- Si un nodo no tiene ninguna arista azul, es una hoja.

Entonces, todas las multitriangulaciones se obtienen por secuencias de flips crecientes desde la inicial, que aquí se traduce en un camino descendente en el árbol binario: en cada momento, si la primera arista azul no está se flipa, y si está se cambia a rojo. Al final quedan todas las aristas rojas en una hoja del árbol que es la multitriangulación que buscamos. Además, esa hoja es la única que tiene la multitriangulación en cuestión.

Esto nos permite describir un algoritmo para recorrer el grafo de flips.

**Algoritmo 2.1.26** (Recorrido del grafo de flips y enumeración de multitriangulaciones [9]). Input: enteros  $n$  y  $k$

Output: lista de las  $k$ -triangulaciones de  $n$  vértices

1.  $C := [(T_{n,k}^{\min}, 1, 0)]$ ,  $L := []$ .
2. Mientras  $C \neq []$ :
  - a) Sea  $(T, i, j)$  el último elemento de  $C$ .
  - b) Si  $i = k(n - 2k - 1) + 1$ , quitar esta terna de  $C$  y añadir  $T$  a  $L$ .
  - c) Si  $j = 2$ , quitar esta terna de  $C$ .
  - d) Si  $j = 0$ , cambiar este elemento de  $C$  a  $(T, i, 1)$  y añadir  $(T, i + 1, 0)$ .
  - e) Si  $j = 1$ , cambiar este elemento a  $(T, i, 2)$ . Sea  $T'$  la triangulación consistente en flipar la  $i$ -ésima arista relevante. Si el flip es creciente, añadir  $(T', i, 0)$  a  $C$ .
3. Output  $L$ .

En el algoritmo,  $C$  es un camino en el grafo,  $i$  representa el índice de la primera arista azul y  $j$  el número (1 o 2) del hijo que se está recorriendo. Se trata de una búsqueda en profundidad (DFS). Aunque no incluimos los detalles, en la implementación usamos una versión ligeramente mejorada, basada en el hecho de que las ternas de la forma  $(T, i, 1)$  se encuentran siempre entre  $(T_1, i_1, 2)$  y  $(T, i_2, 2)$  en la pila, donde  $T$  es un flip creciente de  $T_1$  y  $i_1 \leq i < i_2$ , de modo que no es necesario guardar el índice  $j$  en la pila sino solamente la secuencia de flips.

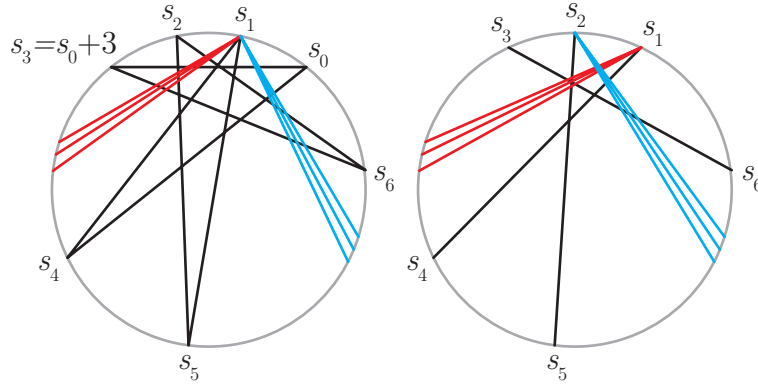


Figura 2.6: En el grafo de la derecha hay un 3-cruce, en el de la izquierda está la 3-estrella resultante de inflarlo. Al aplanar esta estrella, se vuelve al cruce original. Nótese cómo se mueven las aristas entre ambos grafos.

#### 2.1.4. Inserción y eliminación de vértices

Estas son transformaciones que permiten pasar de multitriangulaciones de  $n$  a  $n + 1$  vértices y viceversa.

**Definición 2.1.27.** Sea  $T$  una  $k$ -triangulación del  $n$ -gono y  $E$  un  $k$ -cruce contenido en  $T$ . Sean  $s_1, \dots, s_{2k}$  los vértices de  $E$  por orden circular. Decimos que  $E$  es un *cruce externo* si  $s_1, s_2, \dots, s_k$  son consecutivos.

Dado un cruce externo  $E$ , llamamos *inflación* de  $E$  en  $T$ ,  $\overline{T}^E$ , al grafo cuyos vértices son  $V \cup s_0$ , con el vértice  $s_0$  justo antes de  $s_1$ , y las siguientes aristas:

- todas las aristas de  $T$  sin vértices en  $s_1, \dots, s_k$
- $(s_0, s_i)$ , para  $1 \leq i \leq k$
- $(s_i, t)$ , para  $1 \leq i \leq k$ ,  $t$  vecino de  $s_i$  y  $s_k \prec t \preceq s_{k+i}$
- $(s_{i-1}, t)$ , para  $1 \leq i \leq k$ ,  $t$  vecino de  $s_i$  y  $s_{k+i} \preceq t \prec s_1$

En esta transformación, cada arista relevante se obtiene a partir de una sola arista original. Las  $k$  aristas del cruce dan lugar a dos aristas y el resto a una.

**Teorema 2.1.28.**  $\overline{T}^E$  es una  $k$ -triangulación en  $n + 1$  vértices.

*Demostración.* Si hubiera un  $(k + 1)$ -cruce en  $\overline{T}^E$ , las mismas aristas formarían un  $(k + 1)$ -cruce en  $T$ , que no existe. Por lo tanto,  $\overline{T}^E$  es  $(k + 1)$ -libre y como el número de aristas es  $k(2n - 2k - 1) + 2k = k(2(n + 1) - 2k - 1)$ , es una  $k$ -triangulación.  $\square$

En esta operación, el  $k$ -cruce pasa a ser una estrella. La operación inversa parte de una estrella con  $k + 1$  vértices consecutivos, es decir, con una arista de borde, y la convierte en un cruce.

**Definición 2.1.29.** Sea  $T$  una  $k$ -triangulación en  $n + 1$  vértices,  $e = (s_0, s_0 + k)$  una arista de borde de  $T$  y  $s_0, s_1 = s_0 + 1, \dots, s_k = s_0 + k, \dots, s_{2k}$  los vértices de la estrella que contiene a  $e$ . El *aplanamiento* de  $e$  en  $T$ ,  $\underline{T}_e$ , se define como el grafo cuyos vértices son  $V \setminus s_0$  y sus aristas

- todas las aristas de  $T$  sin vértices en  $s_0, \dots, s_k$
- $(s_i, t)$ , para  $1 \leq i \leq k$ ,  $t$  vecino de  $s_i$  y  $s_k \prec t \preceq s_{k+i}$
- $(s_{i+1}, t)$ , para  $0 \leq i \leq k-1$ ,  $t$  vecino de  $s_i$  y  $s_{k+i} \preceq t \prec s_0$

Al aplanar una estrella, se fusionan  $k$  pares de dos aristas,  $(s_{i-1}, s_{k-i})$  con  $(s_i, s_{k-i})$ . El resto de aristas relevantes no se fusionan y dan lugar a otra arista relevante.

**Teorema 2.1.30.**  $\underline{T}_e$  es una  $k$ -triangulación en  $n$  vértices.

*Demostración parcial.* El número de aristas es  $k(2n - 2k - 1)$ , así que si  $\underline{T}_e$  es libre, es una  $k$ -triangulación. Pero el argumento de antes para demostrar que es libre no sirve en este caso: dos aristas que no se cruzan antes de aplanar pueden empezar a cruzarse. Esto pasa si una arista es de la forma  $(s_i, t)$  con  $s_k \prec t \preceq s_{k+i}$  y la otra de la forma  $(s_i, u)$  con  $s_{k+i} \preceq t \prec s_0$ . Después de aplanar, quedan  $(s_i, t)$  y  $(s_{i+1}, u)$ , que se cruzan. Sin embargo, se puede demostrar que esto no puede generar un  $(k+1)$ -cruce, así que sí es cierto que el aplanamiento de un conjunto libre es libre.  $\square$

## 2.2. Rigidez

### 2.2.1. Resultados generales

Dado que las  $k$ -triangulaciones tienen  $k(2n - 2k - 1)$  aristas, que es el número adecuado para ser bases en una matroide de rigidez en dimensión  $2k$ , cabe preguntarse si efectivamente lo son. De hecho, la condición de Laman (Definición 1.1.8) se cumple.

**Lema 2.2.1.** (a) Los conjuntos  $(k+1)$ -libres son grafos de Laman en  $2k$  dimensiones.

(b) Dada una matroide de rigidez de dimensión  $2k$ , los siguientes enunciados son equivalentes:

- Las  $k$ -triangulaciones son bases.
- Las  $k$ -triangulaciones son rígidas.
- Las  $k$ -triangulaciones son independientes.
- Los conjuntos  $(k+1)$ -libres son independientes.

*Demostración.* Para todo subconjunto de vértices  $U$ , las aristas forman un conjunto libre, que debe tener como mucho  $k(2|U| - 2k - 1)$  aristas, y esta es justamente la cota de Laman.

Si las  $k$ -triangulaciones son bases, también son rígidas e independientes y cualquier conjunto  $(k+1)$ -libre es independiente por estar contenido en una  $k$ -triangulación. Si son rígidas, deben ser bases porque tienen un número de aristas igual al rango de la matroide de rigidez. Si son independientes, pasa lo mismo. Finalmente, si los conjuntos  $(k+1)$ -libres son independientes, en concreto lo son las  $k$ -triangulaciones.  $\square$

**Proposición 2.2.2.**  $T_{n,k}^{\min}$  es base en cualquier matroide de rigidez en dimensión  $2k$ .

*Demostración.* Es cierto para  $n = 2k + 1$ , donde esta multitriangulación es  $K_{2k+1}$ . Si es cierto para  $n$ , también lo es para  $n + 1$  porque  $T_{n+1,k}^{\min}$  es una 0-extensión de  $T_{n,k}^{\min}$ .  $\square$

Todo esto nos lleva a enunciar las siguientes conjeturas:

**Conjetura 2.2.3.** Cualquiera de los enunciados de la segunda parte del lema 2.2.1 es cierto en la matroide de rigidez de cofactores en dimensión  $2k$  para:



- (a) posiciones genéricas en el plano.
- (b) posiciones genéricas en una cónica.
- (c) posición arbitraria en una cónica.
- (d) posición arbitraria convexa.

La misma conjetura fue formulada en la matroide de rigidez clásica (conjetura 8.6 de [8]). Hemos elegido la matroide de cofactores porque “se comporta mejor” que la de rigidez clásica (ver Teorema 1.3.5), y además las multitriangulaciones se definen en el plano, no en  $2k$  dimensiones, así que hay una forma natural de dar coordenadas a los puntos. Esto hace que se pueda formular la conjetura con posiciones concretas. Cada una de las conjeturas, 2.2.3(a) a la (d), es más fuerte que la anterior.

Por el Teorema 1.3.11, las partes (b) y (c) se pueden reformular en la matroide de rigidez clásica, cambiando la cónica por la curva de momentos.

Para  $k = 1$ , la conjetura dice que las triangulaciones son isostáticas en 2 dimensiones, lo que es fácilmente demostrable incluso en posición arbitraria (por ejemplo, porque se pueden obtener a partir de un triángulo mediante 0-extensiones). Para  $k = 2$ , las partes (a) y (b) son ciertas, gracias a la siguiente propiedad:

**Lema 2.2.4.** *La división de vértice conserva la independencia, y la rigidez, en posiciones genéricas en una cónica.*

*Demostración.* La demostración de que la división de vértice conservan la independencia y la rigidez (Teorema 1.3.5) es válida también en este caso: lo que se hace es colocar los dos vértices en el mismo punto y luego perturbar, pero no se necesita que la perturbación sea genérica (Observación 1.2.14).  $\square$

**Teorema 2.2.5.** *La conjetura 2.2.3(b) es cierta en  $k = 2$  tanto para la rigidez de cofactores como para la rigidez clásica (teorema 8.7 de [8]).*

*Demostración.* La demostración usa las transformaciones de inflación y aplanamiento para pasar de  $n$  a  $n + 1$  vértices. El caso base es  $n = 5$ , que es obvio porque la única 2-triangulación en 5 vértices es  $K_5$ , que es base. Lo supongo cierto para  $n$  vértices y lo demuestro para  $n + 1$ .

Sea  $T$  una 2-triangulación en  $n + 1$  vértices. Por el corolario 2.1.15, hay al menos 4 orejas. Sin pérdida de generalidad, suponemos que  $(0, 3)$  es una de ellas y  $(0, 2, x, 1, 3)$  su estrella exterior. Entonces, la triangulación  $\underline{T}_{(0,2)}$  en  $n$  vértices es base por hipótesis inductiva. Inflando el cruce de  $(1, 3)$  con  $(2, x)$  obtenemos otra vez  $T$ . En esta inflación, tenemos que:

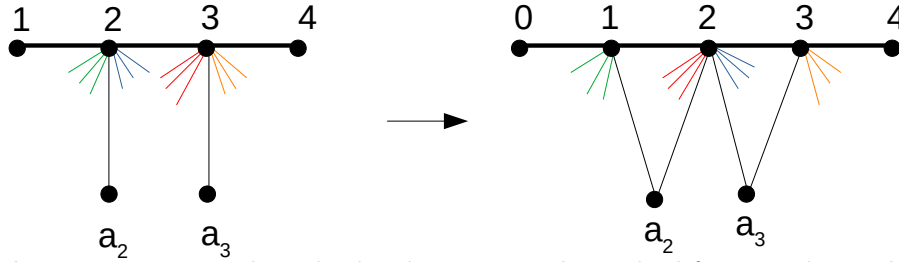
- Los vecinos del vértice 1 han pasado todos al 0, ya que no hay vecinos relevantes entre él y el 3.
- Los vecinos del vértice 2 siguen en el 2 o han pasado al 1.
- Los vecinos del vértice 3 siguen en el 3.

Por lo tanto, esta inflación es una división de vértice, que aplicada a una base da otra base (tanto en la rigidez clásica como en la de cofactores), y  $T$  es base, como queríamos demostrar.  $\square$

Una forma de intentar generalizar el Teorema 2.2.5 a más valores de  $k$  es con el mismo principio de encontrar una oreja y aplanarla para obtener una  $n - 1$  triangulación con un vértice menos. El problema es que, para volver al grafo original, no siempre sirve una división de vértice: solo pasa eso si hay  $k - 1$  orejas consecutivas, lo cual no ocurre para todas las  $k$ -triangulaciones (ver la Figura 21 de [8], con  $k = 3$  y  $n = 12$ ). En general, la operación que se necesitaría para obtener inductivamente todas las  $k$ -triangulaciones es una especie de división de vértice múltiple:

- Situación inicial:  $k + 1$  vértices consecutivos, que forman un subgrafo completo, por ejemplo numerados  $1, 2, \dots, k + 1$ , y otros  $k - 1$  vértices,  $a_2 < \dots < a_k$ , tales que  $i$  es vecino de  $a_i$  para cada  $i$ .
- Situación final:
  - El subgrafo completo ahora tiene  $k + 2$  vértices:  $0, 1, \dots, k + 1$ .
  - Para  $2 \leq i \leq k$ , las aristas  $(i, a_i)$  se desdoblan en dos aristas:  $(i, a_i)$  e  $(i - 1, a_i)$ .
  - Las aristas  $(i, j)$ , con  $1 \leq i \leq k + 1$  y  $k + 2 \leq j \leq n$ , pasan a  $(i - 1, j)$  si  $j < a_i$  y siguen siendo  $(i, j)$  si  $j > a_i$ .

Esta división múltiple, para  $k = 3$ , es como la que aparece en la Figura 2.1.4 pero con  $s_6 = s_0 - 1$ . Recolocando los vértices, se puede ver también de la siguiente forma:



Para  $k = 2$ , esto es una división de vértice normal, con la diferencia de que las aristas se separan entre los nuevos vértices teniendo en cuenta el orden de los vértices. Para  $k = 1$ , es una 0-extensión. Para  $k = 3$ , se dividen dos vértices, intercambiando aristas: no es trivial que esta operación conserve la independencia. Para comprobarlo, he hecho experimentos con el programa Mathematica y he obtenido que en general el rango de los grafos aumenta en 6, como corresponde a conservar la independencia en 6 dimensiones, pero hay algún caso en el que no se cumple (ver ejemplos 2.2.7 y 2.2.8).

En una versión más general de la división múltiple, parto de un subgrafo completo en  $k$  vértices  $1, 2, \dots, k$  conectados a otros  $k$  vértices  $a_1, \dots, a_k$ , y el subgrafo completo pasa a tener  $k + 1$  vértices repartiendo las aristas como he indicado. La versión descrita arriba se obtiene restringiendo  $a_1 = k + 1$ . Desafortunadamente, esta forma más general de división no conserva la rigidez clásica, ni siquiera para  $k = 2$ , ni la de cofactores para  $k = 3$ :

**Ejemplo 2.2.6.**  $K_{6,6}$  es un circuito en dimensión 4. Si

$$E_1 = \{(i, j) : 1 \leq i \leq 6, 7 \leq j \leq 12\} \cup$$

$$\{(13, 1), (13, 2), (13, 3), (13, 7), (14, 1), (14, 4), (14, 8), (14, 13)\}$$

$E_1$  es el resultado de hacer dos 0-extensiones a  $K_{6,6}$ . Pero  $E_1$  es el resultado de una división de

$$E_0 = E_1 \setminus \{(1, j)\} \cup \{(13, 9), (13, 10), (14, 11), (14, 12)\}$$

en los vértices 13, 1 y 14. He podido calcular que  $E_0$  es libre.

**Ejemplo 2.2.7.** En la forma restringida de división que describo arriba, este contraejemplo funciona para  $k = 3$  (dimensión 6) y  $K_{8,8}$ . Si

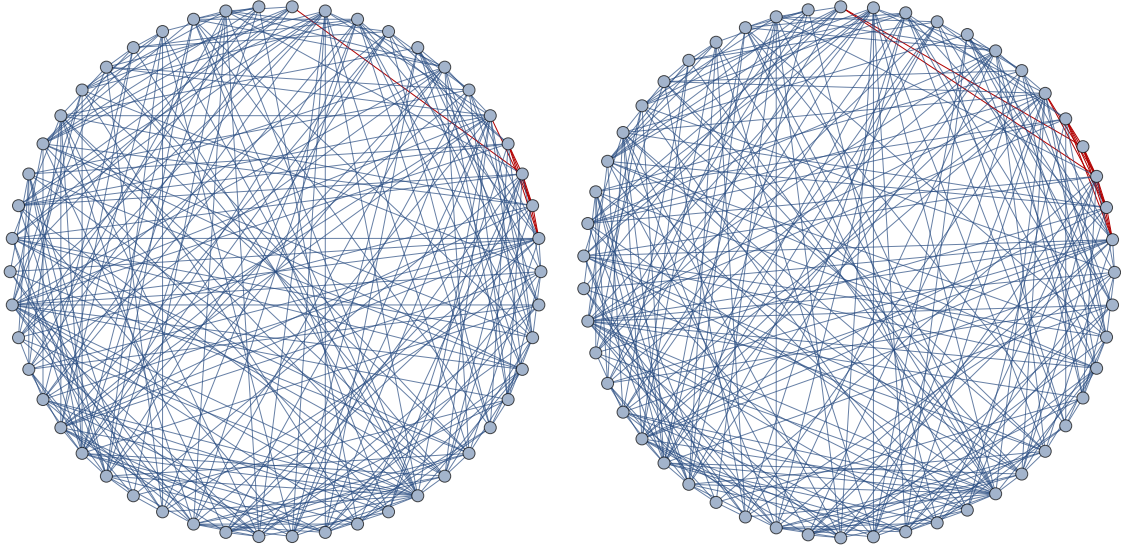
$$E_1 = \{(i, j) : 1 \leq i \leq 8, 9 \leq j \leq 16\} \cup \{(9, 10), (17, 1), (17, 2), (17, 3), (17, 9), (17, 10), \\ (17, 11), (18, 1), (18, 4), (18, 9), (18, 10), (18, 12), (18, 17)\}$$

$E_1$  es el resultado de hacer dos 0-extensiones a  $K_{8,8}$ , luego es dependiente en 6 dimensiones. Pero esto es el resultado de una división de

$$E_0 = E_1 \setminus \{(1, j)\} \cup \{(17, 13), (17, 14), (18, 15), (18, 16)\}$$

en los vértices 9, 17, 1, 18 y 10. Una vez más,  $E_0$  es libre.

**Ejemplo 2.2.8.** Probando 100 ejemplos al azar con Mathematica he encontrado un grafo de 50 vértices en el que la división múltiple con  $k = 3$  no conserva la rigidez, no solo la clásica, sino tampoco la de cofactores. Los vértices 1 a 4 y las aristas  $(2, 5)$  y  $(3, 12)$  se dividen. El grafo original es el de la izquierda y después de dividir los vértices queda como a la derecha. Se han resaltado las aristas del  $K_4$  (después  $K_5$ ) y las dos que se dividen.



**Observación 2.2.9.** En los ejemplos 2.2.6 y 2.2.7, las condiciones del orden de los vértices y de Laman se cumplen, lo que indica que estas condiciones no son suficientes en la rigidez clásica para que la división funcione. En el Ejemplo 2.2.8 el orden se conserva pero no estamos seguros de si se conserva Laman. El grafo del que se parte es de Laman porque es independiente (esto se ha comprobado calculando el rango en una posición concreta). En cambio en el grafo de la derecha, que no es independiente, no es fácil comprobar la propiedad de Laman en  $m = 6$  (no conocemos ningún algoritmo polinómico para comprobar dicha propiedad).

El hecho de que las 2-triangulaciones son isostáticas implica que todo flip contiene un único circuito. Nos interesa saber qué aristas intervienen en el circuito, porque si las dos aristas (la que sale y la que entra) intervienen, el flip conserva la rigidez. Si esto pasa para todos los flips, habremos demostrado la conjetura 2.2.3 (esto vale para cualquiera de las cuatro versiones de la conjetura), ya que el grafo de flips es conexo. También nos interesa saber con qué signo, como veremos en la subsección siguiente.

**Conjetura 2.2.10.** Si  $G = (V, E)$  es un flip entre dos  $k$ -triangulaciones, las dos aristas que intervienen en el flip forman parte del circuito y tienen el mismo signo en la autotensión correspondiente para:

- (a) alguna posición en el plano (la misma para todas las triangulaciones).
- (b) posiciones genéricas en una cónica.
- (c) posición arbitraria en una cónica.
- (d) posición arbitraria convexa.

Para cualquier  $k$ , esta conjetura implica la 2.2.3, como ya se ha dicho. El primer punto es equivalente a “posiciones genéricas” cuando se habla de rigidez, pero no cuando tenemos los signos en cuenta: ahora hablar de “posiciones genéricas en el plano” no tiene sentido, porque los signos dependerán del orden de los vértices.

**Teorema 2.2.11.** Para todo flip entre dos 2-triangulaciones, hay posiciones de los vértices en la cónica que hacen que las dos aristas involucradas en el flip tengan el mismo signo en el circuito contenido en el flip.

*Demostración.* Se demuestra por inducción sobre el número de vértices. Para  $n = 5$  solo hay una multitriangulación, y el problema no tiene sentido. Para  $n = 6$ , el circuito obtenido es siempre  $K_6$  y las dos aristas del flip son dos diámetros, que tienen el mismo signo (ya que en este circuito todos los diámetros tienen el mismo signo, ver Teorema 1.3.22).

Si es cierto para  $n$ , tomo una  $k$ -triangulación  $T$  en  $n + 1$  vértices. Ya hemos visto que  $T$  es la división de vértice de una  $k$ -triangulación  $T'$  en  $n$  vértices. Esta misma división de vértice aplicada a  $T' \cup f$  nos da  $T \cup f$ . Los signos de  $e$  y  $f$  en  $T' \cup f$ , por hipótesis inductiva, son los mismos, y se conservan al hacer la división de vértice, por lo tanto siguen siendo los mismos en  $T \cup f$ . Al perturbar la posición de los vértices de manera que no haya dos en el mismo punto, los signos se conservan por continuidad.  $\square$

Esto no demuestra la Conjetura 2.2.10(a), porque en ella se pide que exista una posición que valga para todas las 2-triangulaciones a la vez. De todas formas, si hubiera otra posición en la que los signos son opuestos, por continuidad, habría una posición intermedia en la que un coeficiente es 0. Esto significaría que una arista del flip no está en el circuito, luego este circuito está contenido en una multitriangulación.

**Proposición 2.2.12.** Dado un flip entre dos 2-triangulaciones, si en una posición los signos de los coeficientes de las aristas son opuestos, existe otra posición en la que una de las dos 2-triangulaciones no es libre (ni rígida).

Por lo tanto, si la Conjetura 2.2.3(c) es cierta, la Conjetura 2.2.10(c) también lo sería para  $k = 2$ .

## 2.2.2. El multiasociaedro

Nuestro interés en que las aristas del flip tengan el mismo signo se debe a la relación de esta propiedad con la posible construcción del *multiasociaedro*.

Consideremos el complejo simplicial  $\Delta_{n,k}$  formado por los conjuntos de aristas  $(k + 1)$ -libres. En este complejo, la intersección de todas las facetas es una cara, formada por las aristas irrelevantes (incluyendo las de borde). La llamaré “cara irrelevante”.

**Teorema 2.2.13** (Jonsson [10]). El complejo de multitriangulaciones es el join de una esfera simplicial shellable de dimensión  $k(n - 2k - 1)$  con la cara irrelevante.

Podemos llamar complejo reducido  $\overline{\Delta}_{n,k}$  al complejo cuyas caras son los conjuntos  $(k+1)$ -libres de aristas relevantes. El teorema de Jonsson nos dice que este complejo es una esfera shellable. Querríamos realizar este complejo como el complejo de caras de un politopo.

La manera de formalizar esto es la siguiente: Si elegimos una matriz  $M$  con  $\binom{n}{2}$  filas y de rango  $2nk - \binom{2k+1}{2}$ , podemos pensar en las filas de  $M$  como una configuración de  $\binom{n}{2}$  vectores en un cierto  $\mathbb{R}^N$  y *realizar* el complejo  $\Delta_{n,k}$  sobre ella, considerando para cada cara del complejo el cono generado por los correspondientes vectores. Llamamos al conjunto de conos así obtenido  $\Delta_{n,k}(M)$ . Obsérvese que ese conjunto de conos puede no ser un abanico. La primera condición necesaria es que los conjuntos de vectores correspondientes a caras de  $\Delta_{n,k}$  sean linealmente independientes, de modo que definan conos de la dimensión adecuada. La condición no es suficiente, porque los conos pueden solaparse entre sí.

También tiene sentido hacer el cociente por el subespacio generado por los vectores correspondientes a aristas irrelevantes. Suponiendo que estos vectores sean linealmente independientes, este cociente nos da una configuración de  $\binom{n}{2} - nk$  vectores con rango  $nk - \binom{2k+1}{2}$ , en la que podemos realizar el complejo reducido y obtener así un conjunto de conos  $\overline{\Delta}_{n,k}(M)$ .

**Conjetura 2.2.14** (Existencia del multiasociaedro [8, 10, 13]). *Existe una manera de elegir la matriz  $M$  que hace que el complejo reducido de multitriangulaciones sea un abanico completo politopal. A este politopo se le llama multiasociaedro.*

A veces se llama multiasociaedro al politopo dual de este, que sería un politopo simple. Se sabe que la conjetura es cierta para  $k = 1$ , donde se llama *asociaedro*, y para  $n \leq 2k + 3$ : en  $n = 2k + 1$  es un punto, en  $n = 2k + 2$  un símplice con  $k + 1$  vértices y en  $n = 2k + 3$  el politopo cíclico de dimensión  $2k$  con  $2k + 3$  vértices (Lema 8.7 de [8]). También se sabe que es cierta para  $k = 2$  y  $n = 8$ : el politopo se construye en [11].

Nuestra esperanza, y la motivación de este trabajo, es que existan posiciones  $p_1, \dots, p_n$  de puntos en el plano tal que la matriz de  $C_{2k-1}^{2k-2}$ -cofactores de dicha configuración dé precisamente una realización del multiasociaedro como abanico politopal. En particular:

1. La Conjetura 2.2.3(a) se corresponde con la condición necesaria que hemos enunciado arriba. Si la conjetura se cumple para una cierta elección de posiciones, entonces todos los símplices de  $\Delta_{n,k}(M)$  (y por tanto los de  $\overline{\Delta}_{n,k}(M)$ ) tienen la dimensión adecuada.
2. La Conjetura 2.2.10(a) nos da una segunda propiedad, también necesaria. Si la conjetura es cierta, los conos de  $\overline{\Delta}_{n,k}(M)$  cumplen la siguiente propiedad, que también es obviamente necesaria: para cada pareja de multitriangulaciones  $T_1$  y  $T_2$  que difieren en un flip, los correspondientes conos de  $\overline{\Delta}_{n,k}(M)$  “se intersecan bien” (se encuentran en lados opuestos del hiperplano que contiene a su cara común). Esta propiedad es lo que en [12, Sección 4.5.2] se llama la propiedad ICoP (“propiedad de intersección de cocircuitos”) y, de acuerdo al Corolario 4.5.19 de [12] es casi suficiente para garantizar que los conos de  $\overline{\Delta}_{n,k}(M)$  forman una triangulación de la correspondiente configuración de vectores, es decir, que forman un abanico simplicial completo. (Ver Teorema 2.2.18)

Como pasos hacia la Conjetura 2.2.14 vamos a introducir y estudiar los *ciclos elementales* de  $\overline{\Delta}_{n,k}$ .

Toda esfera triangulada  $\Delta$  tiene un complejo de celdas dual. Los ciclos de las 2-caras de ese complejo de celdas dual los llamamos ciclos elementales de  $\Delta$ . En nuestro caso, un ciclo elemental se corresponde con un grafo  $(k + 1)$ -libre al que le faltan dos aristas

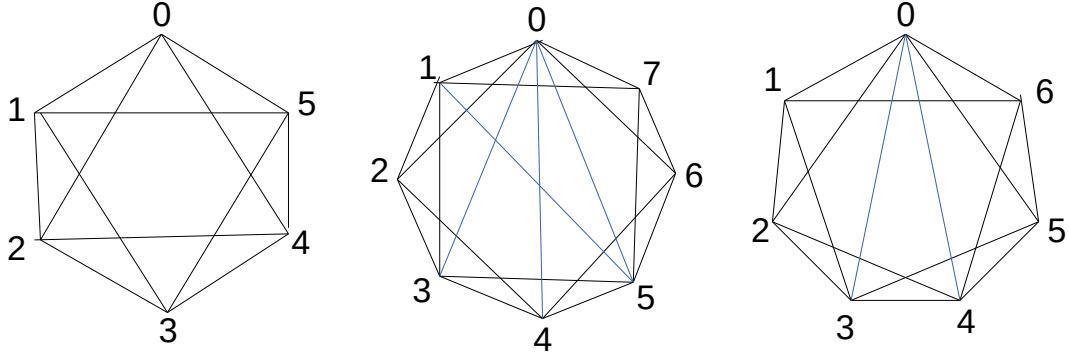


Figura 2.7: Centros de ciclos. Las aristas azules son las relevantes. En el primer caso las dos estrellas coinciden, y el ciclo tiene longitud 3:  $\{03, 14, 25\}$ . En el segundo, no hay estrellas comunes y la longitud es 4:  $\{14, 16, 25, 47\}$ . En el tercero, hay una estrella común y la longitud es 5:  $\{14, 15, 25, 26, 36\}$ . En cada caso, añadiendo al centro dos aristas consecutivas del ciclo se obtiene una multitriangulación y, además, todas las multitriangulaciones que contienen al ciclo son de esa forma

relevantes para ser multitriangulación. A ese grafo le llamamos el *centro* del ciclo. Los vértices del ciclo son las multitriangulaciones obtenidas añadiendo dos aristas relevantes a ese centro (ver la Figura 2.7). Cada arista que une esos vértices se corresponde con lo que hasta ahora hemos llamado un flip.

**Lema 2.2.15.** *Todos los ciclos elementales de  $\overline{\Delta}_{n,k}$  tienen longitud menor o igual a cinco.*

*Demostración.* Sea  $T$  una multitriangulación que contiene al centro del ciclo. En esa multitriangulación, el centro se corresponde a quitar dos aristas relevantes. Como cada arista relevante separa a dos estrellas, tenemos tres casos posibles:

- Si las estrellas son las cuatro distintas, el ciclo es un cuadrilátero, que viene a ser el producto cartesiano de dos flips.
- Si las estrellas son las mismas en las dos aristas, el ciclo es un triángulo, ya que los dos flips van a la bisectriz común de las dos estrellas, es decir, a dos multitriangulaciones conectadas a su vez por un flip.
- Si solo una de las estrellas coincide, podemos aplanar todas las demás estrellas de una en una, puesto que en toda  $k$ -triangulación hay al menos  $2k$  orejas, hasta obtener una configuración de  $2k + 3$  vértices. El ciclo sobrevive tal cual, pero ahora está en el complejo  $\overline{\Delta}_{2k, 2k+3}$ , que sabemos que es el complejo de caras del politopo cíclico de dimensión  $2k$  con  $2k + 3$  vértices. El centro consiste en un subconjunto de  $2k - 2$  vértices. Para que el criterio de paridad de Gale se cumpla al añadir dos vértices, estos deben ser consecutivos de entre los cinco que no se usan (y quizá no de cualquier manera), luego el ciclo es de longitud como mucho cinco.  $\square$

**Definición 2.2.16.** Dada una cara  $F$  del complejo reducido  $\overline{\Delta}_{n,k}$  y una configuración de vectores  $M$ , decimos que  $\overline{\Delta}_{n,k}(M)$  es localmente esférico en  $F$  si el link de  $F$  es un abanico completo al proyectar el complejo reducido el subespacio lineal generado por  $F(M)$ .

En concreto, en el caso de una cara de codimensión 2, este link es isomorfo al ciclo elemental de esa cara, y que sea localmente esférico equivale a que todos los conos tengan la misma orientación y que el ciclo dé una sola vuelta alrededor del centro.

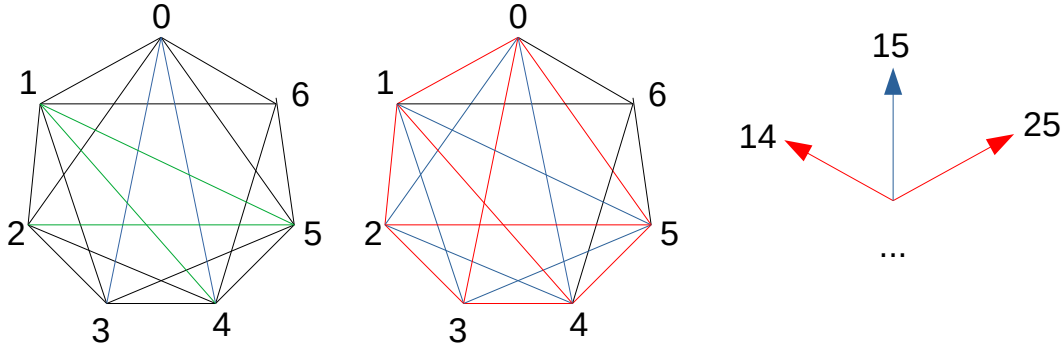


Figura 2.8: A la izquierda, un flip del tercer ciclo de la figura anterior, que se obtiene añadiendo al centro las tres aristas marcadas en verde. En el centro, los signos de los coeficientes del circuito, que es un  $K_6$ . El signo de la arista 15 es opuesto a 14 y 25, lo que implica que, como vectores en la proyección 2-dimensional que sale de hacer el cociente por el centro, el vector 15 es combinación positiva de 14 y 25, como en la figura de la derecha. Eso implica que los ángulos de los conos (14,15) y (15,25) suman menos de  $\pi$  y, por tanto, el ciclo no puede dar dos vueltas alrededor del origen.

**Teorema 2.2.17.** *Para cada ciclo elemental en  $\overline{\Delta}_{n,2}$  existe una elección de posiciones de los puntos en la cónica que hace que, tomando como matriz  $M$  la de cofactores, ese ciclo concreto sea localmente esférico.*

*Demostración.* Por el Teorema 2.2.11, se pueden elegir las posiciones de tal manera que los coeficientes de las aristas de un flip tienen el mismo signo, lo que significa que los conos quedan a lados opuestos de su intersección y los conos tienen la misma orientación.

Si el ciclo tiene longitud 3 o 4, en ese caso solo se puede dar una vuelta alrededor del centro, y hemos terminado. Si la longitud es 5, aplanando todas las estrellas que no se usan en el ciclo, queda una configuración de siete puntos donde todavía aparece ese ciclo.

Añadiendo tres de las cinco aristas, se puede conseguir que el circuito sea un  $K_6$  donde estas aristas son, por este orden, un diámetro, una de longitud 2 y otro diámetro (ver la Figura 2.8). En esa posición el signo de la segunda arista es opuesto al de la primera y la tercera (una vez más, por el Teorema 1.3.22), luego el ángulo entre estas dos es menor que  $\pi$ , como se ilustra en la parte derecha de la figura, lo que implica que solo se puede dar una vuelta.  $\square$

**Teorema 2.2.18.** *Para cualquier  $k$  y  $n$ , si existe una matriz  $M$  que hace que todos los ciclos elementales sean localmente esféricos, entonces el complejo reducido de multitrian-gulaciones es un abanico completo para esa matriz.*

*Demostración.* Si todos los ciclos elementales son localmente esféricos, en concreto los conos que se tocan tienen la misma orientación y se cumple la condición ICoP. De acuerdo al Corolario 4.5.19 de [12] a esa condición basta añadirle una condición que nos diga que el complejo “cubre a la esfera solo una vez”. Para ello, demostraré que los links de dimensión  $d$  en el complejo son localmente esféricos por inducción sobre  $d$ .

El caso base es  $d = 1$ , que se cumple por hipótesis. Suponiéndolo cierto para  $d - 1$ , lo demuestro para  $d$ . Sea por tanto  $F$  una cara de  $\Delta_{n,k}$  cuyo link tiene dimensión  $d$  (o sea,  $|F| = nk - \binom{2k+1}{2} - d - 1$ ). Como por hipótesis de inducción todos los links de dimensión menor que  $d$  son esféricos, la proyección es una inmersión local de una  $d$ -esfera (el link de



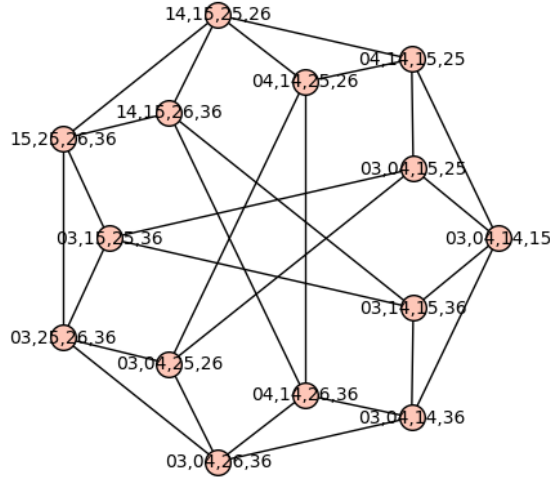


Figura 2.9: El grafo de flips entre 2-triangulaciones de 7 puntos

$F$  en  $\overline{\Delta}_{n,k}$ ) en otra  $d$ -esfera (la esfera unidad en el espacio lineal resultante de cocientar por  $F(M)$ ). Toda inmersión local de un compacto en un Hausdorff es una aplicación de recubrimiento y como la esfera no tiene recubrimientos no triviales, es un homeomorfismo. Por lo tanto, el link de  $F$  también es localmente esférico.  $\square$

Esto demuestra que, con esta condición algo más fuerte que la 2.2.10(a), el multiasocedro existe como abanico; quedaría por demostrar que este abanico es politopal. Ya se sabe que el abanico existe para  $n \leq 2k + 4$  [13], para  $k = 2$  y  $n \leq 13$  [14] y para  $k = 3$  y  $n \leq 11$  [13], pero en estos casos no se tiene una realización como politopo.

### 2.2.3. 2-triangulaciones con pocos vértices

En 5 vértices o menos, la conjetura 2.2.10 es trivial porque la única 2-triangulación es el grafo completo. Para  $n = 6$ , al grafo completo le sobra exactamente una arista y debe ser de las tres de longitud 3, de forma que el grafo de flips es un triángulo. Los tres diámetros tienen el mismo signo (ver el Lema 1.3.20), y la conjetura también se cumple. De hecho, para puntos en posición convexa, y para los casos que nos interesan en las multitriangulaciones, el Lema 1.3.20 se puede reescribir de la siguiente manera más geométrica:

**Lema 2.2.19.** Sean  $(p_1, \dots, p_n)$  puntos en posición convexa en el plano, y sea  $G(p)$  un circuito de la rigidez de cofactores de grado  $2k - 1$  (o sea, de dimensión  $2k$  par). Si  $p_i$  tiene grado  $2k + 1$  en  $G(p)$  entonces los coeficientes del circuito que involucran a  $i$  tienen signos alternados cuando se miran los puntos alrededor de  $i$  comenzando y terminando por las aristas de la envolvente convexa que usan a  $i$ .

*Demostración.* Tenemos las aristas  $(i, j_1), \dots, (i, j_{2k+1})$  donde  $j_1 < j_2 < \dots < j_{2k+1}$ . El Lema 1.3.20 nos dice que los signos alternan excepto al pasar por encima de  $i$ ; en particular hay  $2k - 1$  cambios de signo y por tanto las aristas  $(i, j_{2k+1})$  y  $(i, j_1)$  tienen signos opuestos.  $\square$

**El caso de 7 puntos** Para  $n = 7$ , hay 14 2-triangulaciones. El grafo de flips tiene  $14 \cdot 4 / 2 = 28$  aristas, y se muestra en la Figura 2.9.



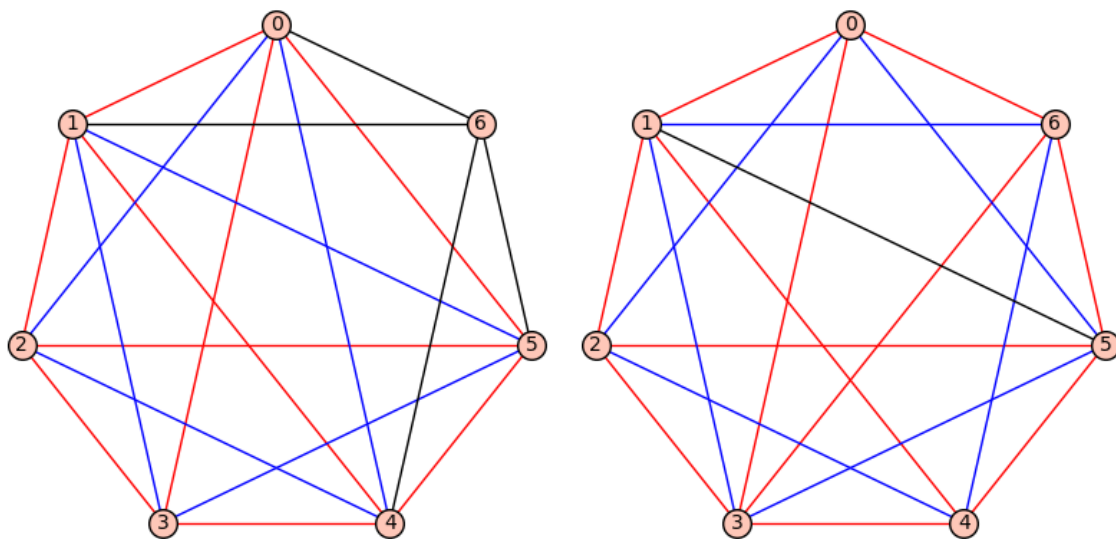


Figura 2.10: Los dos tipos de flips entre 2-triangulaciones de 7 puntos

Estas 2-triangulaciones son 7 posibles posiciones de dos esquemas, es decir, el grafo de flips tiene dos órbitas de 2-triangulaciones, módulo permutación cíclica de las etiquetas: uno en el que las aristas relevantes son  $(0, 3), (3, 6), (6, 2), (2, 5)$  y otro en el que son  $(0, 3), (3, 6), (2, 5), (5, 1)$ . Entonces, si se añade una arista para obtener el grafo de un flip, en muchos casos (21 de los 28 casos) la arista forma un  $K_6$  (como en el grafo de la izquierda e la Figura 2.10, donde las aristas rojas tienen signo positivo y las azules signo negativo), que es un circuito, y el grafo es una 0-extensión de este  $K_6$ , luego la conjetura se cumple trivialmente.

Si no se forma un  $K_6$  (grafo de la derecha), el grafo del flip es un circuito. Esto solo pasa si, en el segundo de los esquemas mencionados, se flipa la arista  $(2, 5)$  a la  $(1, 4)$ : corresponde a las siete aristas del centro del grafo anterior. En este caso, los vértices 2 y 4 tienen grado 5, luego las aristas  $(2, 5)$  y  $(1, 4)$  tienen signo opuesto a la  $(2, 4)$ , por el Lema 2.2.19. O sea, tienen el mismo signo.

**Proposición 2.2.20.** *La conjetura 2.2.10(d) es cierta para  $k = 2$  y  $n \leq 7$ .*

**Ejemplo 2.2.21.** En este último grafo, para posiciones genéricas en la cónica, todas las aristas forman un circuito, pero el signo de la arista  $(1, 5)$  depende de la posición, y hay posiciones, como  $(t, t^2)$ , con  $t = 0, 5/7, 1, 2, 3, -2, -1$ , donde se puede salir del circuito (su coeficiente es cero).

**El caso de 8 puntos** Para  $n \leq 11$  he aplicado el algoritmo 2.1.26 en Sage y he recorrido el grafo de flips entero. Para  $n = 8$ , hay 84 2-triangulaciones y  $84 \cdot 6/2 = 252$  flips posibles. En ellos quise calcular el rango y los signos del circuito. Para ello, tengo que elegir una colocación de los puntos.

Una opción es coger los puntos equiespaciados en la circunferencia. En esa circunstancia los números son de la forma  $(\cos(2\pi i/n), \sin(2\pi i/n))$  para  $i = 0, \dots, n-1$ , que son algebraicos. Esto significa que se puede calcular la matriz en el cuerpo de los números reales algebraicos, donde, además de ser exactos, es fácil decidir si son cero. De esta forma, pude calcular el rango, que es efectivamente uno menos que el número de aristas en todos los

flips. Como también estaba interesado en los signos de las autotensiones, los obtuve a partir de la matriz de rigidez.

Otra opción es que la posición de los vértices se pueda expresar con números racionales, por ejemplo  $((i^2 - 1)/(i^2 + 1), 2i/(i^2 + 1))$ . Esto es equivalente a tomar posiciones  $(i, i^2)$  en una parábola, ya que la rigidez, tanto clásica como de cofactores, se conserva por transformación proyectiva. Este cambio hizo más fácil el cálculo del rango (ahora los elementos de la matriz son enteros), pero algunos signos de los coeficientes habían cambiado.

Si se cambia la posición  $(i, i^2)$  por  $(ai+b, (ai+b)^2)$ , una realización es una transformación proyectiva de la otra, por lo tanto los signos se mantienen. Otra opción es usar una asignación de valores del parámetro que no sea lineal en  $i$ :  $(i^2 + ti, (i^2 + ti)^2)$ . En esa situación, cuanto mayor sea  $t$ , más cerca estamos de la parametrización  $(i, i^2)$ .

El resumen de los cálculos es que:

**Proposición 2.2.22.** *Para  $n = 8$ , de los 252 posibles flips, en 156 las estrellas usan 6 vértices, en 88 usan 7 vértices y en los 8 restantes usan todos los vértices. Sin embargo, en este caso los circuitos formados pueden incluir más vértices que los de las estrellas:*

- *En 24 de los flips que usan 6 vértices, 18 de los que usan 7 y 4 de los que usan todos, el circuito es todo el grafo.*
- *En 14 de los flips que usan 7 vértices y 4 de los que usan todos, el circuito es el grafo menos una arista.*
- *En los 132 restantes que usan 6 vértices y los 56 que usan 7, el circuito es inducido por estos vértices.*

En los casos de 6 vértices, la diferencia entre unos y otros casos es que en los 132 del tercer punto los 6 vértices inducen un  $K_6$  y en los otros 24 no. Para dos estrellas en 6 vértices en total (con dos aristas en común), inducir un  $K_6$  es equivalente a que estén las seis aristas del hexágono convexo, ya que el resto siempre están. Lo mismo se puede decir de los de 7 vértices: en 56 casos se obtiene el circuito antes mencionado y en los 32 restantes no, de forma que se usan todos en el circuito.

En un caso donde el circuito tiene todos los vértices menos una arista, en concreto  $\{(0, 3), (0, 4), (0, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6)\}$  donde se cambia  $(0, 5)$  por  $(4, 7)$ , calculé el la tensión de esa arista,  $(2, 4)$ , en función del parámetro  $t$  antes mencionado, a ver si era idénticamente 0 (y el circuito es así en posiciones genéricas) o no (y la posición que estaba usando no era genérica). Esta tensión puede escribirse como un menor de la matriz de rigidez formado por las otras filas y todas las columnas menos tres del primer vértice, dos del segundo y una del tercero, de manera que se excluyen las flexiones triviales. El menor en cuestión no es más que un polinomio en  $t$ , que tenía grado 91, mientras que el resto tenían grado 94: esto explicaba por qué la tensión se hacía 0 cuando  $t$  tiende a infinito.

Traté de factorizar ese polinomio, obteniendo

$$(t+1)^7(t+2)^6(t+3)^{10}(t+4)^8(t+5)^9(t+6)^6(t+7)^{13}\left(t+\frac{15}{2}\right) \\ (t+8)^9(t+9)^5(t+10)^3(t+11)^7(t+12)^3(t+13)^4$$

Volvemos a tener los factores  $t+i+j$  para  $i$  y  $j$  desde 0 hasta 7, pero además tenemos un factor  $t+15/2$ . En  $t = -15/2$ , aunque algunas aristas tienen distinto signo, todas están en el circuito menos la  $(2, 4)$ .

Por otro lado, hemos comprobado que

**Proposición 2.2.23.** *Proposición: La conjetura 2.2.10(a) es cierta para  $k = 2$  y  $n = 8$ , tomando los puntos en la cónica con  $p_i = (i, i^2)$ .*

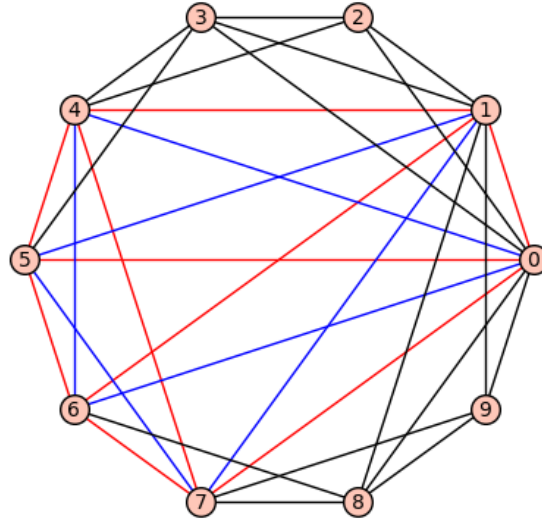


Figura 2.11: Los signos de las aristas en el circuito de un flip en 10 vértices

**Más de 8 puntos** Para  $n = 9$ , he repetido la clasificación de los flips de  $n = 8$ , obteniendo:

- Estrellas en 6 vértices: en 873 casos el circuito tiene 6 vértices, en 378 tiene 7, en 216 tiene 8 y en 189 tiene 9.
- Estrellas en 7 vértices: 378 casos con 7 en el circuito, 298 con 8 y 260 con 9.
- Estrellas en 8 vértices: 72 casos con 8 en el circuito y 90 con 9.

Más allá de  $n = 9$ , tengo algunos ejemplos concretos: para  $n = 10$ , he elegido multitriangulaciones al azar. De acuerdo a la proposición 2.1.25, esto se puede conseguir si empiezo en la triangulación  $T_{n,k}^{\min}$  y hago un número suficiente de flips aleatorios. El circuito suele ser  $K_6$ , como en la Figura 2.11, en el que los vértices que participan en el circuito son 0, 1, 4, 5, 6 y 7.

En todos los casos, para  $n = 9, 10$  y  $11$ , tomando puntos equiespaciados en la cónica, se cumple también la conjetura. Es decir:

**Proposición 2.2.24.** *Proposición: La conjetura 2.2.10(a) es cierta para  $k = 2$  y  $n \leq 11$ , tomando los puntos en la cónica con  $p_i = (i, i^2)$ .*

Para  $n = 17$ , comenzamos con la 2-triangulación de la figura 2.12 y hago un flip más: en concreto, cambio la arista  $(10, 16)$  por  $(9, 15)$ . A diferencia de lo que pasa antes, el circuito es toda la 2-triangulación, pero los signos dependen de las posiciones. Usando posiciones equiespaciadas salen los de la izquierda de la Figura 2.13, y usando posiciones  $(i, i^2)$ , los de la derecha (aquí es donde descubrí los cambios de signo).

Entonces traté de usar la asignación de parámetros en función de una variable  $t$  que he descrito antes, y para  $t = 0$ , los signos son los mismos, salvo las aristas  $(3, 13)$  y  $(3, 16)$ , que cambian. Al ir subiendo  $t$ , la arista  $(3, 13)$  se vuelve positiva entre 3 y 4 y  $(3, 16)$  se vuelve negativa entre 9 y 10. Traté de sacar la tensión en la arista  $(3, 13)$  en función de  $t$ . Ese polinomio resulta tener grado 256 y una raíz entre 3 y 4, tal y como preveía. Si lo factorizo, el resultado es

$$(t+1)^6(t+2)^5(t+3)^7(t+4)^5(t+5)^8(t+6)^3(t+7)^5(t+8)^4(t+9)^4(t+10)^3(t+11)^8$$

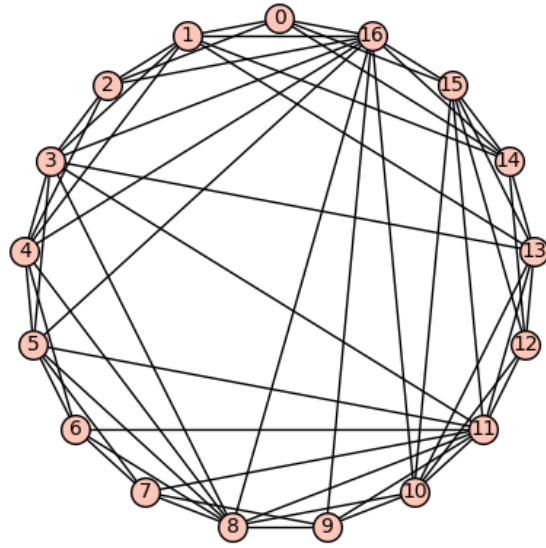


Figura 2.12: Una triangulación en 17 vértices

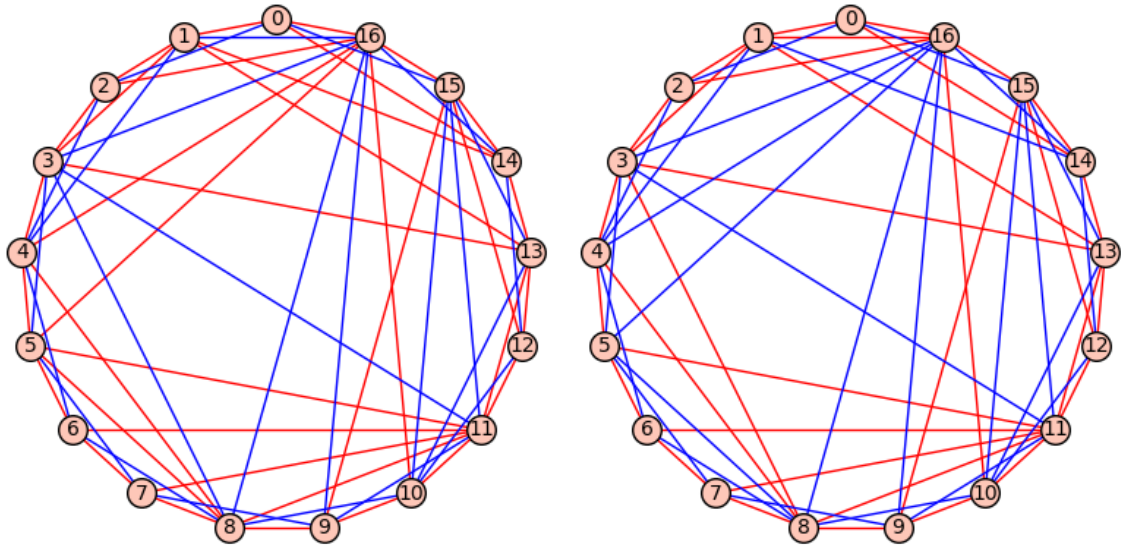


Figura 2.13: Los signos de las aristas en el circuito del flip de  $(10, 16)$  a  $(9, 15)$  en la 2-triangulación anterior

$$\begin{aligned}
& (t+12)^7(t+13)^9(t+14)^{13}(t+15)^{10}(t+16)^{12}(t+17)^{12}(t+18)^{11}(t+19)^{15}(t+20)^9 \\
& (t+21)^9(t+22)^3(t+23)^7(t+24)^{12}(t+25)^{13}(t+26)^{10}(t+27)^{10}(t+28)^4(t+29)^4 \\
& (t+30)^3(t+31)^4(1336115327t^{21} + 539790592108t^{20} + 102752857858661t^{19} \\
& + 12254468597168668t^{18} + 1026866249468860745t^{17} + 64255889720239466278t^{16} \\
& + 3114651385235672135083t^{15} + 119709420924769966104314t^{14} \\
& + 3702881763431563624488217t^{13} + 93006874228851427298237120t^{12} \\
& + 1904745269914014132363308011t^{11} + 31795662095884298150253193568t^{10} \\
& + 430442894673461446621415886783t^9 + 4674101561683795563750879402294t^8 \\
& + 39906947420496146979923865637725t^7 + 258335202368531822565691252733850t^6 \\
& + 1175658354599740572080759455960128t^5 + 2998512363863108720343935473709400t^4 \\
& - 1585466561193719302108513587226680t^3 - 44411377110387585759553730074959600t^2 \\
& - 152939514638137986668436635923776000t - 193594953267461423807412957273600000)
\end{aligned}$$

Los 31 primeros factores son de la forma  $t + i + j$ , con  $0 \leq i < 17$ . Para  $t = -i - j$ ,  $i^2 + ti = -ij = j^2 + tj$ , o sea, hay dos puntos en la misma posición, que tiene el efecto de hacer 0 este término. No tengo una explicación muy clara del último factor. Además de ser irreducible, todos sus coeficientes son primos con el director, excepto el de grado 20, que dividido por él da exactamente 404. Es este factor el que da la raíz entre 3 y 4 (3,19697843360376), además de otras seis raíces reales negativas.

# Bibliografía

- [1] W. Whiteley, *Some Matroids from Discrete Applied Geometry*, Contemporary Mathematics, 1996
- [2] W. Whiteley, *An analogy in geometric homology: rigidity and cofactors on geometric graphs*, 1997
- [3] L. Crespo Ruiz, F. Santos, *Bar-and-joint rigidity on the moment curve coincides with cofactor rigidity on a conic*, arXiv:2106.08923
- [4] K. Clinch, B. Jackson, S. Tanigawa, *Abstract 3-Rigidity and Bivariate  $C_2^1$ -Splines I: Whiteleys Maximality Conjecture*, 2017
- [5] J. Graver, B. Servatius, H. Servatius, *Combinatorial Rigidity*, American Mathematical Society, 1993
- [6] N. J. Thurston, *On the rigidity of graphs*, Bachelor of Arts Thesis, Reed College, 1991
- [7] J. Richter-Gebert, *Perspectives on Projective Geometry*, 129–143, Springer, 2010
- [8] V. Pilaud, F. Santos, *Multitriangulations as Complexes of Star Polygons*, Discrete Comput Geom 41, 284–317 (2009)
- [9] V. Pilaud, M. Pocchiola, *Multitriangulations, Pseudotriangulations and Primitive Sorting Networks*, Discrete Comput Geom 48, 142–191 (2012)
- [10] J. Jonsson, *Generalized triangulations and diagonal-free subsets of stack polyominoes*, J. Comb. Theory Ser. A 112(1), 117–142 (2005)
- [11] J. Bokowski, V. Pilaud, *On symmetric realizations of the simplicial complex of 3-crossing-free sets of diagonals of the octagon*, Proceedings of the 21st Annual Canadian Conference on Computational Geometry, Vancouver, British Columbia, Canada, August 17-19, 2009
- [12] J. A. de Loera, J. Rambau, F. Santos, *Triangulations: Structures for Algorithms and Applications*, 2012
- [13] N. Bergeron, C. Ceballos, J. P. Labbé, *Fan realizations of subword complexes and multi-associahedra via Gale duality*, Discrete and Computational Geometry 54(1), 195–231 (2015)
- [14] T. Manneville, *Fan realizations for some 2-associahedra*, Experimental Mathematics, 27(4), 377–394 (2017)